UNIVERSIDADE ESTADUAL DO OESTE DO PARANÁ
CAMPUS CASCAVEL
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

LUIZA STUNDER
RUAN PABLO PFEFFER GALLIO
LEONARDO ALVES SILVA

RELATÓRIO DA DISCIPLINA DE METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA:
ESTÁGIO SUPERVISIONADO II
PROMAT

CASCAVEL
2025

LUIZA STUNDER
RUAN PABLO PFEFFER GALLIO
LEONARDO ALVES SILVA

METODOLOGIA E PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA: ESTÁGIO SUPERVISIONADO II PROMAT

Relatório apresentado como requisito parcial da disciplina para aprovação. Orientadores: Prof. Tiago Klümber e Renato Guimarães.

CASCAVEL

2025

SUMÁRIO

SUMÁRIO 3
LISTA DE FIGURAS 5
LISTA DE QUADROS 6
LISTA DE ANEXOS 7
INTRODUÇÃO 5
PROMAT 6
RELATO DE EXPERIÊNCIA 8
ENCONTROS 13
1.1. ENCONTRO 1 – 24/08/2024 13
1.1.1. Plano de aula 13
1.1.2. Relatório 16
1.1.3. Materiais utilizados 17
9.1. ENCONTRO 2 – 31/08/2024 18
9.1.1. Plano de aula 18
9.1.2. Relatório 22
9.1.3. Materiais 26
9.2. ENCONTRO 3 - 14/09/2024 27
9.2.1. Plano de aula 27
9.2.2. Relatório 34
9.2.3. Materiais utilizados 36
9.3. ENCONTRO 4 – 21/09/2024 37
9.3.1. Plano de aula 37
9.3.2. Relatório 42
9.3.3. Materiais utilizados 44
9.4. ENCONTRO 5 – 28/09/2024 46
9.4.1. Plano de aula 46
9.4.2. Relatório 49
9.4.3. Materiais utilizados 53
9.5. ENCONTRO 6 – 05/10/2024 56
9.5.1. Plano de aula 56
9.5.2. Relatório 59
9.5.3. Materiais utilizados 61

9.6. ENCONTRO 7 – 26/10/2024 ... 66
9.6.1. Plano de aula ... 66
9.6.2. Relatório ... 69
9.6.3. Materiais utilizados ... 71
9.7. ENCONTRO 8 – 09/11/2024 ... 71
9.7.1. Plano de aula ... 71
9.7.2. Relatório ... 73
9.7.3. Materiais utilizados ... 74
9.8. ENCONTRO 9 – 23/11/2024 ... 77
9.8.1. Plano de aula ... 77
9.8.2. Relatório ... 82
9.9. ENCONTRO 10 – 25/11/2023 ... 85
9.9.1. Plano de aula ... 85
9.9.2. Relatório ... 98
CONSIDERAÇÕES FINAIS ... 99
REFERÊNCIAS ... 99
ANEXOS: ... 103

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Mapa mental.......... 36
Figura 2: Quadro de medalhas olímpicas.......... 37
Figura 3: Tabuleiro utilizado.......... 65
Figura 4: Peças utilizadas, impressas em 3d.......... 66
Figura 5: Círculo com eixos.......... 74

LISTA DE QUADROS

Quadro 1- Cronograma..5

LISTA DE ANEXOS

Anexo 1: Apostila aula 1.. 124
Anexo 2: Apostila aula 2 probabilidade... 126
Anexo 3: Apostila aula 2, estatística... 129
Anexo 4: Aula 4, sistemas lineares...133
Anexo 5: Apostila utilizada na aula 5, sistemas lineares.. 138
Anexo 6: Apostila aula 6, geometria analítica...141

INTRODUÇÃO

Este trabalho apresenta um relato das atividades desenvolvidas durante a disciplina de Metodologia e Prática de Matemática - Estágio Supervisionado II, integrante do quarto ano do curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Estadual do Oeste do Paraná (Unioeste Campus Cascavel). O foco deste relatório abrange os planos de aula, os relatórios de cada encontro e as experiências vivenciadas no âmbito do programa Promat - Programa de Acesso e Permanência de Estudantes da Rede Pública de Ensino em Universidades Públicas, com especial ênfase na área de Matemática.

No decorrer dos dez encontros realizados foram abordados os seguintes temas: análise combinatória, probabilidade e estatística, matrizes e determinantes, sistemas lineares, geometria analítica, trigonometria e funções trigonométricas. Cada tópico foi ministrado por meio de atividades que visam estimular o raciocínio lógico, a compreensão do objeto matemático, a aplicabilidade de tópicos matemáticos a situações da vida real, e o pensamento matemático, complementadas por listas de exercícios para reforço aos estudantes.

O enfoque pedagógico adotado durante os encontros incluiu a incorporação de resolução de problemas, jogos, materiais manipulativos e dinâmicas em grupo, reconhecendo que a socialização juntamente com atividades exploratório investigativas potencializa a aprendizagem e o desenvolvimento dos alunos. O intuito era criar um ambiente colaborativo e promover a interação social, dada a participação voluntária dos alunos no projeto. Os encontros visavam não apenas transmitir conhecimento, mas também esclarecer dúvidas e consolidar o aprendizado dos participantes.

Os alunos, motivados por seu interesse voluntário no projeto, puderam se beneficiar não apenas do conteúdo matemático, mas também do fortalecimento das habilidades sociais. Além disso, buscávamos, como estagiários, adquirir experiência em sala de aula, o que se concretizou. Nossas expectativas incluíam a troca de aprendizado entre os membros da equipe, a experimentação de diferentes metodologias e práticas, e a constante busca pela melhoria do nosso desempenho, tornando esse estágio um momento de grande aprendizado e desenvolvimento em nossa jornada como futuros professores.

Quadro 1- Cronograma

Encontros	Conteúdo	Datas
1	Análise Combinatória	24/08
2	Probabilidade e Estatística	31/08
3	Matrizes e Determinantes	14/09
4 e 5	Sistemas Lineares	21/09 e 28/09
6	Geometria Analítica	05/10
7 e 8	Trigonometria	26/10 e 09/11
9	Funções Trigonométricas	23/11
10	Gincana final	30/11

Fonte: Elaborado pelo 4º ano de matemática

Tal cronograma foi concretizado.

PROMAT

O Projeto Promat, realizado na Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste, no Campus de Cascavel, destina-se a oferecer reforço em conceitos matemáticos ensinados no Ensino Fundamental voltado para a preparação de alunos do Ensino Médio, visando especialmente os desafios apresentados pelo Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM e outros processos seletivos. Conduzido por alunos do curso de Licenciatura em Matemática, o projeto assume a missão de revisitar conceitos fundamentais da Matemática da Educação Básica que possam não ter sido devidamente assimilados durante o percurso escolar.

As aulas ministradas pelos estagiários do curso de Licenciatura em Matemática, transcorreram aos sábados pela manhã, totalizando dez encontros com duração de quatro horas cada. Sob a supervisão e orientação dos professores do

Colegiado do Curso de Licenciatura em Matemática, o Promat acolheu estudantes das três séries do Ensino Médio da rede pública de ensino, provenientes não apenas de Cascavel, mas também de regiões circunvizinhas. Além disso, participaram do projeto alunos ingressantes no curso de Matemática e de outros cursos da Unioeste.

Ao longo desses dez encontros, nos dedicamos ao ensino de conteúdos pertinentes ao Ensino Médio, destacando-se problemas característicos de vestibulares e do ENEM. O objetivo primordial consistiu em preparar os alunos para essas avaliações, elucidar suas dúvidas e, simultaneamente, cultivar o apreço pela Matemática.

O projeto revelou-se uma experiência enriquecedora para todos os envolvidos, representando uma oportunidade valiosa para os alunos ampliarem seus conhecimentos. Para nós, estagiários, foi a oportunidade de aprimorar nossas habilidades e adquirir prática, essencial para nos prepararmos para a futura função docente.

RELATO DE EXPERIÊNCIA

Introdução

Durante a formação acadêmica passamos por muitos momentos, e temos inúmeras experiências que auxiliam no desenvolvimento profissional como docentes. Um desses momentos que é especialmente propício à diversas experiências é o Promat, um projeto desenvolvido pela Unioeste no qual os acadêmicos atuam como professores em um curso preparatório de matemática. É conhecido dentro do curso como um ambiente ideal, no qual é possível utilizar diversas didáticas existentes, e compreender a forma com a qual didáticas ativas influenciam o ensino.

Nosso objetivo para este relato é disponibilizar uma experiência que encontramos ser proveitosa para o desenvolvimento do compreendimento matemático de nossos alunos. Essa experiência foi potencializada e melhorada pelo formato com o qual estava acontecendo, como dito anteriormente, o Promat é um ambiente propício para o uso dessas metodologias.

O relato será dividido em algumas partes a fundamentação teórica para a maneira com a qual construímos essa e outras de nossas aulas, uma descrição de nossa experiência, juntamente com a reflexão do que aconteceu, finalizando assim com a conclusão do nosso trabalho. Com isso, temos o objeto deste relato, uma aula que lecionamos, em específico a nona aula do cronograma, a que lida com funções trigonométricas. A seguir, temos a fundamentação teórica do que utilizamos para a construção desse plano.

Fundamentação teórica

Para fundamentar essa aula nos baseamos em duas ideias que estudamos durante o curso de licenciatura em matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná (UNIOESTE). A primeira delas sendo a reformulação de problemas segundo Thomas Butts (1997). Para Butts, existem 5 subconjuntos de tipos de problemas, sendo eles:

1. Exercícios de reconhecimento;
2. Exercícios algorítmicos;
3. Problemas de aplicação;

4. Problemas de pesquisa aberta;
5. Situações-problema;

Estas 5 categorias, segundo Butts, englobam os problemas matemáticos. Cada categoria, entretanto, não é completamente disjunta com os outros subconjuntos, há uma interseção das categorias. Uma coisa que o autor aponta é que apenas os primeiros dois tipos de exercícios são geralmente trabalhados em escola, com o quinto sendo utilizado, mas menos comum.

Para este trabalho, essa tipologia dos problemas pode ser utilizada para compreender a maneira com qual os alunos trabalharam durante a apresentação dos problemas, como os interpretaram, e como isso influenciou a maneira que resolveram. Por exemplo, inicialmente os problemas que apresentamos para os alunos poderiam facilmente ser caracterizados como exercícios de reconhecimento, visto que apenas pedimos para que os alunos identificassem o funcionamento das funções apresentadas, escrevendo o que acham ser a resposta correta.

Entretanto, Butts também fala sobre a reformulação de problemas, como um problema pode partir de uma certa forma, e ser reinterpretado em outro contexto, alterando a sua tipologia. Com isso, um exercício de reconhecimento pode facilmente tornar-se um problema de pesquisa aberta, algo que foi visto e feito nesta aula. Por exemplo, tomemos o que aconteceu quando adicionamos um coeficiente b à função $sen(x + b)$, a identificação de como o coeficiente afeta a função é um exercício de reconhecimento, entretanto, com a pergunta adicional “para quais valores de b a função dada se iguala à $cos(x)$”, o problema passa a ser uma pesquisa aberta, visto que não são valores únicos que farão as duas funções se igualarem, e a identificação do padrão não é tão simples.

Para além da tipologia, que foi utilizada para a formulação das perguntas a serem feitas para os alunos durante a aula em questão, a forma da aula foi inspirada nas ideias de Almoloud (2009) sobre a dialética ferramenta-objeto. Em seu artigo apresentado em um congresso, Almoloud (2009) discute a forma com qual a aprendizagem acontece, o que leva o aluno ao entendimento de estruturas, e de formas resolutivas, e como isso pode ser utilizado para a criação, e ratificação de problemas de pesquisa aberta. O autor deixa claro que ao interagir com um problema de tipologia similar ao que Butts denomina pesquisa-aberta, o aluno passa por estágios no qual a aprendizagem é formulada, os estágios que o autor aponta são:

1. Há inicialmente um desequilíbrio, proveniente da interação do conhecimento antigo com o problema, que faz com que o aluno tenha de construir alguma ferramenta rudimentar para explorar o problema
2. O aluno tem que explicitar essa ferramenta que utilizou e explicar seu funcionamento para o outro
3. A ferramenta é institucionalizada pelo professor, tornando-se objeto didático
4. O objeto didático é relembrado, reutilizado, familiarizado, e torna-se conhecimento antigo
5. Uma fase que é opcional, mas o objeto pode se complexificar a partir desse ponto, apresentando mais utilizações

Com isso, o autor constrói diversas ferramentas que podem ser utilizadas para analisar, construir, e aplicar situações de problemas abertos. Utilizamos as ideias propostas pelo autor para polir as perguntas às quais chegamos pela análise original apenas considerando a tipologia do problema. Utilizamos também, como base para nossa didática, a complexificação do objeto didático a partir do problema de pesquisa aberta.

Para além das considerações que influenciaram a maneira com a qual conduzimos a aula, a utilização do software do Geogebra foi algo que fomos influenciados de sua eficácia devido à pesquisa realizada por Jesus e Dullius (2018), na qual os autores elaboraram uma sequência didática para o trabalho de funções de segundo grau que utilizava uma abordagem de investigação matemática. Nessa sequência, havia uma progressão contínua do desenvolvimento da forma geral de uma função do segundo grau, construindo o conhecimento por meio da exploração de distintas funções do segundo grau, junto com perguntas que instigam o aluno a determinar o funcionamento da função e sua estrutura. Visto isso, iremos agora dizer a forma com a qual essas ideias foram utilizadas e nos influenciaram na construção de planos de aula.

Relato de experiência

Nossa aula foi fundamentada na resolução de problemas e na investigação matemática como base, visto que havíamos utilizado a resolução de problemas muitas vezes anteriormente, em edições passadas do Promat e durante a regência.

A aula prevista para o dia… em questão tratava-se de funções trigonométricas, para a qual decidimos então aplicar nossa abordagem preferida, com uma aplicação de problemas que progressivamente englobam mais da forma geral de uma função trigonométrica, complexificando o conhecimento. Os problemas que criamos com base na teoria já apresentada visavam em cada etapa adicionar um novo coeficiente para a função seno, eventualmente construindo uma noção intuitiva do que cada coeficiente fazia com a forma da função, e como isso poderia ser utilizado. Inicialmente construímos questões que pediam a estrututra e o funcionamento da função base, o que identificam sobre ela, então adicionamos algum coeficiente e fizemos questionamentos similares.

Iniciamos a aula com uma análise do círculo trigonométrico, com um pequeno vídeos demonstrando a conexão entre o gráfico das funções seno e cosseno com o círculo trigonométrico. Visto que na aula anterior a essa aplicação os alunos haviam estudado a trigonometria no círculo, eles estavam minimamente familiarizados com a forma que seno e cosseno eram representados geometricamente, mas não estavam familiarizados com a representação gráfica das funções. Depois desta introdução com o círculo trigonométrico, pedimos que os alunos abrissem o GeoGebra, *software* que utilizaram até o final da aula para a visualização das funções trigonométricas. Utilizamos o software como base para nossa aula devido à facilidade com a qual os alunos poderiam mudar os coeficientes das funções teste. Isto é, segundo Almouloud, tem de fazer a reinterpretação do objeto para este novo contexto, fazendo então o processo dialético.

Com isso, iniciamos a aula pedindo para que os alunos insiram a função $sen(x)$, pedimos para que eles identifiquem algumas propriedades da função base, com isso estávamos fazendo com que o conhecimento prévio deles por meio das aulas de trigonometria guiasse as descrições, utilizando do conhecimento antigo deles para instigar o desenvolvimento de novo conhecimento (Saddo, 2009). Depois de algumas perguntas para guiar o reconhecimento das propriedades da função, percebemos que um problema enfrentado foi o fato de que o GeoGebra, por base, apenas deixa os números em forma decimal, algo que foi aparente como um problema, pois valores como $\frac{\pi}{2}$ não são usuais de serem vistos em forma decimal para alunos de Ensino Médio; assim teve inicialmente um problema para a identificação destes pontos “notáveis” da função.

Depois desse reconhecimento inicial, pedimos que os alunos inserissem a função $2\,sen(x)$, e nesse momento foi demonstrado um problema técnico relacionado ao ambiente computacional, visto que o GeoGebra não estava detectando a mudança da função, levando alguns alunos a concluírem, erroneamente, que quando a função é multiplicada por algum número, não teria efeito nenhum na função. Isso explicitou a necessidade de provisões no plano de aula de tempo para o adequamento dos alunos ao software em questão, visto que muitas vezes a curva de aprendizagem tem um período de estagnação no começo. Outro problema que foi visto nesta aula foi a falta que materiais impressos fizeram para guiar a resolução de problemas e a investigação que estava ocorrendo, visto que as questões apenas estavam sendo projetadas, alguns alunos estavam com dificuldade de lê-las, e a bateria do *notebook* que estava sendo utilizado acabou na metade de um dos problemas.

Depois de termos resolvido as dificuldades que apareceram devido à tecnologia, pudemos retornar aos problemas, cuja próxima etapa era a inserção da função $a\,sen(x)$, visto que ao inserir um coeficiente no *software*, automaticamente será criado um controle deslizante no qual o aluno pode controlar o valor do coeficiente. Essa facilidade em testar vários valores para o coeficiente a fez com que a realização dos alunos sobre o que este coeficiente estava afetando dentro da função ocorresse de maneira automática para todos, um aluno até mencionou a ideia de amplitude da onda sem nenhuma necessidade dos docentes instigarem esta observação.

Os alunos sentiram um conforto com isso com os próximos problemas que adicionavam cada vez mais coeficientes para a função, agindo sob ela de maneiras diferentes, pedindo para que eles identificassem, e caracterizassem o funcionamento da função, partindo deles. Essa exploração dos problemas fez com que os alunos descrevessem cada um dos coeficientes de maneira similar à como um matemático iria descrevê-los, com apenas algumas questões que visavam motivá-los nesta pesquisa. Esta aprendizagem, construída pela integração e fundamentação de novas ferramentas como objetos, e a re-interpretação desses objetos em diferentes contextos fez com que a aula servisse de um momento único, levando alguns alunos a comentarem, por exemplo: que “nunca haviam entendido” (sic) a noção de frequência, período e amplitude quando se relacionavam com funções trigonométricas, mas que com a interação que tiveram em um ambiente controlado, entenderam essas noções.

Durante a aula, a forma com qual atuamos foi partindo de uma interação a partir de questões motivadoras para os alunos quando ficavam presos em algum problema apresentado. Com perguntas que tinham a intenção de guiar, esclarecer, e deixar claro o que deveria ser feito. No geral, ficamos cada um com um aluno devido ao número reduzido de pessoas que estavam em sala, permitindo que cada docente auxiliasse um único aluno individualmente, auxiliando na compreensão de seus problemas com o conteúdo, e sendo possível dar um auxílio mais próximo.

Reflexões

Para além do conhecimento que os alunos construíram, cada aplicação de uma investigação e resolução de problemas abertos leva à aprendizagem por parte dos docentes também. Visto que, dar ao aluno a autonomia de pesquisar por si só um problema, o mesmo deve estar pronto para inúmeras dúvidas e questionamentos que podem provir da investigação do aluno, o docente deve estar atento para poder auxiliar toda essa vasta gama de perguntas. Essa necessidade de estar preparado para as questões que surgem naturalmente durante uma exploração é aumentada quando a tipologia dos problemas apresentados não é modal, mas sim faz com que vários tipos sejam estudados e explorados, fugindo da maneira com a qual a matemática é apresentada em sala de aula em uma aula tradicional. Além disto, a reinterpretação do mesmo signo em diferentes contextos, obtendo diferentes significados, faz essa “progressão” de problemas tornar-se útil, diferentes formas de analisar e se pensar sobre o objeto em questão são formadas, construídas, e desconstruídas ao longo deste processo, dando ao aluno uma compreensão da estrutura interna do objeto estudado.

Entretanto, uma dificuldade que encontramos ao utilizar a resolução de problemas com o intuito de ensinar partindo dela, foi o requerimento de tempo, especialmente em uma sala de aula heterogênea, no qual cada aluno tem suas próprias necessidades, vontades, e vieses que guiam-no em caminhos diferentes durante a resolução. O trabalho em conjunto de alunos para a resolução de problemas é algo que auxilia a construção do conhecimento, visto que os vieses dos diferentes alunos irão fazer com que tenham de chegar em um consenso de qual maneira de analisar o problema antes de iniciarem.

No final da aula, entregamos aos alunos a apostila contendo todos os conceitos que eles trabalharam dentro da investigação, juntamente com uma lista de exercícios para que pudessem exercitar essas habilidades que desenvolveram, fazendo com que o conhecimento tenha de ser reinterpretado, tornando-se conhecimento antigo, e deixando-os prontos para alguma próxima aplicação.

Conclusão

A experiência vivenciada nesta aula evidenciou como a resolução de problemas e a investigação matemática podem contribuir para a transformação do ensino de funções trigonométricas, tornando-o mais dinâmico e significativo para os alunos. A fundamentação da abordagem na tipologia de problemas de Butts (1997), nos permitiu estruturar a progressão das atividades, conduzindo os alunos de exercícios de reconhecimento a problemas de pesquisa aberta. Essa estratégia favoreceu a construção ativa do conhecimento, estimulando a exploração e a formulação de hipóteses.

Além disso, a dialética ferramenta-objeto proposta por Almoloud (2009) sustentou a metodologia utilizada, uma vez que os alunos passaram por diferentes estágios no processo de aprendizagem, desde o primeiro contato com os problemas até a institucionalização dos conceitos matemáticos explorados. O uso do GeoGebra como ferramenta auxiliou essa progressão, proporcionando uma visualização interativa das funções trigonométricas e permitindo a experimentação direta dos efeitos dos coeficientes sobre os gráficos.

Os desafios enfrentados ao longo da aplicação demonstraram que, embora a metodologia ativa traga inúmeros benefícios, ela exige um planejamento detalhado e flexível para lidar com imprevistos técnicos e as diferentes necessidades dos alunos. A adaptação das estratégias ao contexto da turma mostrou-se essencial para garantir que todos pudessem acompanhar e construir o conhecimento de forma autônoma.

Além do impacto na aprendizagem dos estudantes, essa experiência também representou um crescimento significativo para nós, professores em formação. A necessidade de lidar com questionamentos diversos e ajustar a condução da aula em tempo real nos permitiu refletir sobre nossa prática docente e aprimorar nossas abordagens pedagógicas. Dessa maneira, reafirmamos o potencial das práticas investigativas e da exploração ativa dos conceitos matemáticos, não apenas como estratégias eficazes de ensino, mas também como ferramentas valiosas para o desenvolvimento do pensamento crítico e da autonomia dos alunos.

Referências

ALMOULOUD, Saddo Ag. ATIVIDADES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA. In: EPREM - ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO DE MATEMÁTICA, 10., 2009, Guarapuava. **Anais [...] .** Curitiba: SBEM, 2009. p. 992-1002.

BUTTS, Thomas. Formulando Problemas Adequadamente. In: KRULIK, S.; REYS, R.E. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. São Paulo: Atual, 1997, p.32-48.

JESUS, Danilo do Nascimento de; DULLIUS, Maria Madalena. **O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO DO 2º GRAU**: o caso da 1ª série do ensino médio de uma escola federal. Vale do Taquiri, 2018. Disponível em: https://www.univates.br/ppgece/media/pdf/2018/o_uso_do_software_geogebra_para_o_ensino_de_funcao_do_2_grau_o_caso_da_1_serie_do_ensino_medio_de_uma_escola_federal.pdf. Acesso em: 06 out. 2024

SCHOENFELD, A. **Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?**. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), Investigar para aprender matemática (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT. 1996.

ENCONTROS

Nesta seção, são apresentados os planos de aula e os relatórios das atividades realizadas durante o PROMAT. Os planos estão redigidos no tempo futuro, refletindo a perspectiva em que foram concebidos: como propostas para serem executadas em aulas que ainda iriam acontecer. Já os relatórios fornecem uma análise crítica das atividades desenvolvidas, destacando os desafios enfrentados, as adaptações necessárias e as reflexões sobre a prática docente. Este conjunto de documentos visa não apenas registrar as experiências vivenciadas, mas também servir como material de aprendizado e aprimoramento para futuras intervenções pedagógicas.

ENCONTRO 1 – 24/08/2024
Plano de Aula

Público-Alvo: Alunos do segundo e terceiro ano do ensino médio
Tempo de execução: 4 horas
Conteúdo: Análise combinatória e métodos de contagem
Objetivo Geral: Ensinar (EF08MA03) Princípio multiplicativo da contagem por meio da resolução de problemas
Objetivos Específicos:

- Reconhecer os diferentes métodos de contagem de grupos de elementos em diversos conjuntos.
- Reconhecer as características da cifra de César e sua importância na origem da criptografia.
- Conhecer as diferentes aplicações do Princípio Fundamental e Princípio Multiplicativo da contagem.

Recursos Didáticos: Quadro, giz, computador, projetor, slides, material manipulável: copos coloridos, caixas, cifras de césar impressas em 3d e material de apoio: lista de problemas.

Metodologia:

A aula se dará por meio de uma atividade exploratória de modelagem, tendo em vista a perspectiva pragmática (BARBOSA, 2003) em que queremos estimular as habilidades de resolução de problemas dos alunos. Com isso, reformulamos uma questão presente na prova da segunda fase da OBMEP de 2007, nível 2 para a apresentarmos de forma investigativa para os alunos.

Encaminhamento metodológico:

Inicialmente, explicaremos a dinâmica de introdução para que os alunos se apresentem a seus colegas de grupo. A cada grupo, será disponibilizado duas caixas contendo copos coloridos, em que o objetivo é arranjar os copos dentro da caixa, enquanto uma pessoa à sua frente, sem ver os copos, tenta adivinhar a ordem da cor deles, arranjando-os acima da caixa e pedindo quantos estão na ordem correta.

Esse primeiro jogo será usado como base para explicar o conteúdo, perguntando aos alunos ao final da introdução sobre “quantas maneiras diferentes podem arranjar-se os copos”, e perguntando também se o jogo “ficaria mais fácil” caso tivessem copos de mesma cor. Esperamos que essa atividade dure 45 minutos.

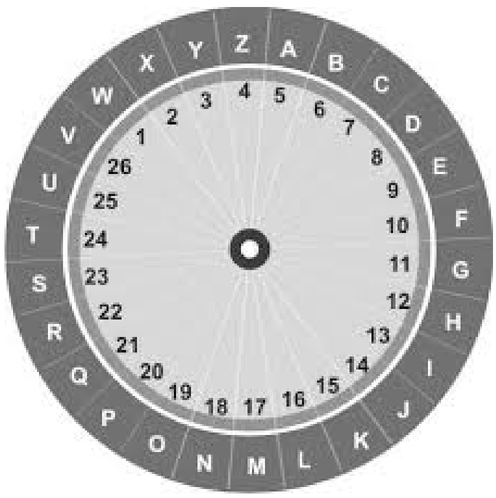
Dando sequência ao conteúdo da aula, utilizaremos como base a metodologia de resolução de problemas. Ainda em grupos, escreveremos no quadro as seguintes cifras (apenas o texto codificado).

Cifra de César		
Chave	Código	Cifra
10 a -> k	matemática	wkdowkdsmk
	criptografia	mbszdyqbkpsk

Iremos explicar que se trata de um código que foi criptografado seguindo um método não aleatório e pediremos que eles busquem decodificar o que foi escrito. Informaremos também que os grupos que solucionarem a cifra irão receber um bombom como prêmio.

Deixaremos que busquem encontrar a solução por 40 minutos. Caso, após 25 minutos, nenhum grupo tenha feito progresso, iremos liberar o uso do celular para buscar informações.

Após passado o tempo, iremos explicar brevemente sobre criptografia, pedindo que os alunos deem exemplos da importância e uso de criptografia no dia a dia deles. Em seguida, explicaremos sobre a Cifra de César, um dos primeiros métodos de criptografia utilizados, e mostrar seu funcionamento com a "Roda da Cifra de César"



Fonte: (Malagutti, 2015).

Explicaremos a maneira que a cifra é utilizada, onde você usa a chave para mover as letras, por exemplo, movendo a letra “A” para a letra que será usada como chave, e re-escrevendo o resto da mensagem nas letras correspondentes dentro da roda. Pediremos para que criptografem seu próprio nome, e passem para pessoa ao seu lado no grupo, pedindo para que ela descubra o que está escrito?

Por meio desta atividade, esperamos que os alunos se familiarizem com a noção de criptografia e, em especial, a Cifra de César.

Em seguida, iremos realizar perguntas para os grupos envolvendo contagem e o método da Cifra de César. As perguntas não devem ser todas expostas para a turma de uma só vez. Em vez disso, devem ser feitas diretamente para cada grupo à medida que avançam na resposta da anterior.

- Pelo método da Cifra de César, quantas chaves são possíveis?
- E se diferenciarmos entre letras maiusculas e minúsculas? E ao adicionarmos os algarismos 0-9?
- Se aplicarmos a técnica de substituição utilizando todas as letras do alfabeto sem ordem determinada (ou seja, sem deslocação fixa, em que cada letra é levada a alguma outra letra qualquer), quantos métodos de criptografia são possíveis?
- Se em uma palavra você utilizasse uma chave (deslocamento) diferente para cada letra, quantas maneiras diferentes existiriam para criptografar a palavra? Essa quantia depende do quê?
- Se o método da Cifra de César for aplicado várias vezes em sequência, cada vez com uma chave diferente, é possível decodificar a mensagem mesmo que você não tenha o conhecimento de *todas* as chaves utilizadas? Por quê?
    - Em caso afirmativo, o que é necessário conhecer?

Espera-se que essa atividade decorra no período de 2 horas. Após uma hora e meia de atividade, pediremos para que os grupos compartilhem o que encontraram até o momento com os colegas, e como chegaram em tais resultados.

Não é necessário que todos os grupos respondam todas as perguntas, mas os professores devem estar acompanhando a atividade de cada grupo e direcioná-los ao uso de métodos de contagem para responder às questões, pedindo também que sempre registrem o que foi feito.

Ao final da aula, entregaremos a folha com os princípios e fórmulas básicas de análise combinatória e contagem e passaremos em formato de slides os problemas da Lista de Exercícios que envolvem as técnicas aprendidas no encontro para reforçar o que foi estudado.

Deixaremos um tempo para que os alunos resolvam (ainda em grupo) e realizaremos uma breve discussão após cada exercício do que foi feito, em que os professores devem formalizar os conteúdos trabalhados, caso necessário. Os exercícios que não forem desenvolvidos em sala ficarão como tarefa.

Referências:

VIDAL, S. C.; CAPRI, M. D. R.; ROMÃO, E. C. **Cryptography as an educational tool in counting techniques for high school**. International Journal for Innovation Education and Research, v. 10, n. 5, p. 76–88, 23 abr. 2022.

MALAGUTTI, Pedro Luiza. **Atividades de Contagem a partir da Criptografia**. 11. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2015. 77 p. (Programa de Iniciação Científica da OBMEP).

HOLANDA, B. **Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra**. Rio de Janeiro, RJ: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2021.

ASTH, Rafael. Exercícios sobre princípio fundamental da contagem. **Toda Matéria**, *[s.d.]* Disponível em: https://www.todamateria.com.br/exercicios-sobre-principio-fundamental-da-contagem/. Acesso em: 6 ago. 2024

Exercícios de Análise Combinatória. **Toda Matéria**, *[s.d.]*. Disponível em: 4https://www.todamateria.com.br/exercicios-de-analise-combinatoria/. Acesso em: 6 ago. 2024

SCHOENFELD, A. **Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?**. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), Investigar para aprender matemática (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT. 1996.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática e a Perspectiva Sócio-crítica. In: II SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, II, 2003, Santos. **Livro de Resumos.** Santos: SBEM, 2003. p. 135-144.

PONTE, J. P. DA. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 4. ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica Editora, 2021.

Relatório

A primeira aula, realizada em 24 de agosto de 2024, contou com a participação de 24 alunos e teve como tema central a análise combinatória e os métodos de contagem.

Iniciamos o encontro às 8 horas com uma breve apresentação e, em seguida, passamos a lista de presença e distribuímos o material da dinâmica de introdução. Para essa atividade, cada dupla recebeu uma caixa de sapatos e cinco copos de cores diferentes. O objetivo era organizar os copos em uma determinada ordem para que outra dupla tentasse adivinhar a sequência correta, recebendo apenas a informação de quantos copos estavam na posição certa. Após um exemplo demonstrativo, os alunos foram divididos em quartetos, jogando em duplas adversárias. Durante a atividade, circulamos pelos grupos, levantando questionamentos sobre as possibilidades de combinação e se a existência de copos repetidos tornaria a identificação da sequência mais fácil. Depois de algumas rodadas, incentivamos os alunos a jogarem com dez copos e perguntamos se isso aumentava a complexidade do desafio.

A dinâmica durou 40 minutos, e, em seguida, iniciamos uma discussão sobre as observações dos alunos no jogo, conectando-as com os princípios de contagem. Aproveitamos também para introduzir brevemente o conceito de criptografia, que seria explorado na atividade seguinte.

Na segunda parte da aula, os alunos receberam duas palavras codificadas por meio da cifra de César. Explicamos que a codificação não havia sido feita de forma aleatória, mas sem revelar o método utilizado. O desafio era tentar decifrar as palavras. Um dos alunos, já familiarizado com a cifra de César, conseguiu rapidamente solucionar o enigma, mas pedimos que não revelasse aos demais. Levantamos questionamentos para estimular sua reflexão e, logo depois, distribuímos uma tabela com a cifra de César para todos os alunos, dando-lhes mais alguns minutos para tentarem a decodificação.

Após o sucesso da primeira etapa, cada aluno criou uma nova palavra criptografada usando a cifra de César e a entregou a um colega para ser decifrada. Enquanto trabalhavam, passamos pelos grupos, fazendo perguntas e sugestões. Em seguida, projetamos cinco questões para serem investigadas e discutidas, enquanto continuávamos circulando entre os grupos para auxiliar nas reflexões.

A atividade foi realizada até às 10;40, com um intervalo às 9:40. Após a conclusão, discutimos as respostas das questões, entregamos um material impresso com os conceitos teóricos abordados e fizemos a explicação formal do conteúdo de análise combinatória e contagem. Como os alunos demonstraram boa compreensão, encerramos a aula distribuindo uma lista de exercícios para que começassem a resolver em sala e finalizassem em casa. Durante essa etapa, auxiliamos na resolução e corrigimos os exercícios com eles.

Às 11h35, agradecemos a participação de todos, informamos o conteúdo da próxima aula e encerramos o encontro.

Materiais

- **LISTA DE EXERCÍCIOS**

1. Considere que uma pessoa possui 3 camisas de cores diferentes (vermelha, azul e branca), 2 calças de modelos diferentes (jeans e social) e 2 sapatos de tipos diferentes (tênis e sapato social). De quantos modos diferentes essa pessoa pode se vestir?

2. Em um relógio digital, as horas são exibidas por meio de quatro algarismos. O relógio varia das 00:00 às 23:59. Quantas vezes por dia os quatro algarismos mostrados são todos pares?

3. De quantas formas podemos colocar 4 bolas verdes idênticas e 4 bolas amarelas idênticas em um tabuleiro 4 × 4 de modo que cada coluna e cada linha possua exatamente uma bola de cada cor?

4. Um cartão da Mega-Sena contém um conjunto de 60 números, de 1 até 60. Um jogo consiste em uma escolha de 6 números deste cartão. Contudo, o jogador tem a opção de marcar mais do que 6 números. Ao fazer isso, ele estará apostando em todos os jogos que podem ser formados com 6 números do conjunto dos números marcados. Atualmente, o preço para apostar em um jogo é R$3,50. Assim, ao marcar uma quantidade maior de números em um cartão, o jogador irá pagar por todos os jogos que podem ser formados com os números escolhidos.
   - 4.1. Qual é o total de jogos da Mega-Sena?
   - 4.2. Caso um apostador marque 9 números do cartão, quanto ele irá pagar e qual será a sua chance de ganhar?

5. Qual é o número mínimo de pessoas que deve haver em um grupo para que possamos garantir que nele há pelo menos três pessoas nascidas no mesmo dia da semana?

6. As Resoluções do CONTRAN nº 590, de 24/05/2016, nº 279, de 06/03/2018, e nº 741, de 17/09/2018, estabeleceram um novo padrão das placas de identificação de veículos brasileiros, seguindo as regras do MERCOSUL. Segundo essas resoluções, “as Placas de Identificação Veicular [...] deverão [...] conter 7 (sete) caracteres alfanuméricos”. Assim, no Brasil, “a placa

MERCOSUL terá a seguinte disposição: LLLNLNN, em que L é letra e N é número”, em substituição ao padrão pré-Mercosul, LLLNNNN.
Supondo que não haja restrição em relação aos caracteres em nenhum dos padrões apresentados, quantas placas a mais, em relação ao sistema antigo, poderão ser formadas com o novo padrão de emplacamento?

7. Uma equipe de trabalho é formada por 6 mulheres e 5 homens. Eles pretendem se organizar em grupo de 6 pessoas, com 4 mulheres e 2 homens, para compor uma comissão. Quantas comissões podem ser formadas?

8. Em uma competição de xadrez existem 8 jogadores. De quantas formas diferentes poderá ser formado o pódio (primeiro, segundo e terceiro lugares)?

- **Apostila utilizada:** Anexo 1

ENCONTRO 2 – 31/08/2024
Plano de Aula

Público-Alvo: Alunos do segundo e terceiro ano do Ensino Médio
Tempo de execução: 4 horas
Conteúdo: Probabilidade e Estatística
Objetivo Geral: Ensinar, por meio da resolução de problemas, o cálculo probabilístico de um evento aleatório, expressando-o como um número racional através da razão entre os casos "favoráveis" e o tamanho do espaço amostral.
Objetivos Específicos:

- Reconhecer a noção base de probabilidade como uma razão entre os casos "favoráveis" e todos os casos possíveis.
- Identificar diferentes tipos de dependência entre variáveis.
- Diferenciar média, moda e mediana de uma população, bem como aprender a calculá-las.

Recursos Didáticos: Quadro, giz, computador, projetor, slides e material manipulável: saquinhos contendo bolinhas de cores diferentes, dados de seis lados, moedas, conjunto de dominós e material de apoio na forma de lista de problemas.

Encaminhamento metodológico:

Devido aos dois tópicos, que mesmo conectados, são distintos, a aula será separada em duas partes. Uma primeira parte, que ocorrerá antes do intervalo, na qual será empregada a metodologia da resolução de problemas Barbosa (2003), que se relacionam com probabilidade, seguida de uma formalização do conteúdo com base na forma que os alunos resolveram. Terá também uma segunda parte na qual os alunos irão fazer uma dinâmica para coletar dados de seus colegas e entender estatística a partir disso.

Sequenciamento da aula e procedimentos

Antes do início do encontro, iremos separar as carteiras em grupos, de tamanho baseado em quantos alunos encontramos na primeira aula. Providenciaremos também, a cada grupo, folhas de rascunho, um saquinho contendo bolinhas de gude de cores diferentes, e dados de seis lados.

Primeira parte (1h40):

Ao iniciar a aula, iremos nos apresentar novamente e pedir que os alunos se apresentem dentro dos grupos que eles estão sentados. Depois disso, iremos explicar para os alunos a base dos conceitos de espaço amostral, e probabilidade, utilizando um exemplo de aniversários.

Escolheremos duas pessoas da sala, e iremos perguntar “Qual a chance de que elas tenham nascido no mesmo dia?”, esperando que eles tenham uma ideia aproximada do que essa pergunta significa. Depois disso, pediremos “Qual a chance de duas pessoas terem nascido em um mesmo mês?”, esperando que eles entendam que nesse caso é uma probabilidade maior.

Na sequência, pediremos a chance aproximada de *qualquer um deles* ter *pelo menos um* aniversário em comum com o outro. Considerando que a sala tenha 30 alunos, assumimos que a resposta que eles darão será muito mais baixa do que a resposta verdadeira (aproximadamente 70%). Depois disso, pediremos para que eles reflitam sobre o que mudou? O que faz essa probabilidade ser diferente?, explicando que, mesmo que a chance de qualquer um ter um aniversário em comum com qualquer outro seja baixa, a chance de pelo menos uma ocorrência é muito mais alta, considerando que existem $\frac{n(n-1)}{2}$ comparações entre eles.

Após o término dessa atividade inicial, iremos desenvolver um problema utilizando o baralho como base para o trabalho. Dependendo da preferência do grupo, iremos deixar que eles trabalhem ou no problema baseado em truco, ou no problema baseado em pife.

Problema Truco:

a) Dado um baralho completo, qual a chance da primeira carta a ser dada ser um ás de espada (A,♤).

b) Dado uma rodada na qual a carta que você tem é um (A,♤), e o vira é um (2,♢), qual é a chance de vitória nesta rodada? c) Dado uma mão inicial composta pelas cartas: {(J,♡), (J,♧), (J,♤)} com o vira sendo (J,♢), qual a probabilidade de vitória dessa mão? d) Dado uma mão inicial composta pelas cartas: {(3,♡), (K,♧), (Q,♡)} com o vira sendo (A,♢), qual a probabilidade de vitória dessa mão?
Problema Pife: a) Dado um baralho completo, qual a chance da primeira carta a ser dada ser um ás de espada; b) Dado uma mão inicial de 9 cartas, qual a chance de você iniciar o jogo com 3 pifes distintos formados por cartas iguais; c) Dado uma mão inicial de 9 cartas, qual a chance de você iniciar o jogo com 3 pifes distintos formados por sequências de mesmo naipe; d) Dado uma mão inicial de 9 cartas, qual a chance de você iniciar o jogo com pelo menos um pife.

Depois do término dessa atividade, iremos entregar a lista de problemas para eles, que será divida em duas partes, uma contendo problemas relacionados a um espaço amostral fixo (saquinho de bolinhas e dominó), e outra com problemas relacionados a uma variável aleatória (dados de seis lados e moedas).

Deixaremos que os alunos trabalhem nessa lista por 1h. Caso estejam trabalhando de maneira individualista dentro dos grupos, pediremos que repassem suas descobertas para os colegas dentro do grupo após meia hora.

Durante esse tempo, devemos auxiliar os alunos para que eles possam chegar na solução dos diferentes problemas. Mesmo que nem todos os grupos cheguem no resultado final de todos os problemas, após 1h pediremos para que cada grupo apresente uma solução encontrada de um problema, explicando o processo que utilizaram para chegar nessa solução. Deveremos estar atentos para que não peçamos para um grupo que não resolveu algum problema para tentar explicá-lo para turma, buscando não constrangê-los.

Problema 1. Dois dados são lançados e observa-se a soma das faces superiores. a) Quais são os possíveis resultados para esta soma? b) Os resultados para as somas são equiprováveis, ou seja, tem a mesma chance de ocorrer? c) Encontre a probabilidade de ocorrência para cada resultado possível.
Problema 2. Duas peças de um dominó comum (de 0 a 6) são sorteadas. Qual é a probabilidade de que tenham um número em comum?
Problema 3. Ana, Beatriz, Carla e Denise combinaram um jogo, jogariam uma moeda para cima até alguma condição acontecer com duas moedas: Ana ganharia se caísse uma cara, depois de uma coroa; Beatriz ganharia se caísse uma coroa, depois de uma cara; Carla ganharia se caísse duas caras seguidas; Denise ganharia se caísse duas coroas seguidas. Quem tem a maior chance de ganhar? Há alguma diferença entre as probabilidades de Ana e Beatriz com a de Carla e Denise?
Problema 4. Uma caixa contém bolas coloridas como a que vocês têm em sua frente. Remova duas bolas aleatoriamente, anote quais bolas foram removidas, e a probabilidade dessa exata ordem ser removida. Qual a ordem de bolas com menor probabilidade?
Problema 5. Escolhendo um número de 26 até 175 qual a probabilidade de: a) ser múltiplo de 4; b) ser múltiplo de 6; c) ser múltiplo de 4 e de 6; d) ser múltiplo de 4 ou de 6
Problema 6. Um jogo é composto das seguintes regras: i. Em cada rodada, ocorre o lançamento de um dado comum não viciado. ii. Se sair o número 3, então o jogador A ganha.

iii. Se sair um dos números do conjunto {4, 5, 6}, então o jogador B ganha.
iv. Se sair um dos números do conjunto {1, 2}, então o dado é lançado outra vez até
resultar em 3 ou 4 ou 5 ou 6.
O jogador que ganhar uma rodada primeiro vence o jogo.
a) Qual é a probabilidade de que o jogador B vença na primeira rodada?
b) Qual é a probabilidade de que o jogador B vença na segunda rodada?
c) Qual é a probabilidade de que o jogador B vença na rodada n, sendo n um número natural?
d) Qual é a probabilidade de que o jogador B vença até a rodada n, sendo n um número natural?

Depois de os alunos compartilharem as diferentes formas que utilizaram para resolver estes problemas iremos sistematizar o conceito de probabilidade, por meio de uma lista de conceitos contendo a forma com qual cada tópico foi trabalhado. Faremos uso da forma com qual cada grupo resolveu para auxiliar na sistematização do conteúdo.

Segunda parte (1h40):

Para a segunda parte da aula, iremos realizar uma dinâmica, na qual cada grupo receberá uma trena para que eles meçam a altura de seus colegas de seu grupo.

Os discentes então deverão retornar à seus grupos, e pediremos que eles representem os dados que serão coletados de formas diferentes, para que eles tenham um contato com as diferentes formas que dados podem ser representados.

Depois de todos os dados serem coletados, iremos utilizar dados de alturas que nós coletaremos antes da realização da aula, possivelmente dos colegas de estágio. Com isso, mostraremos as diferentes partes de uma análise estatística: mediana, moda, média, e também daremos noções de variância e desvio padrão. Em seguida, pediremos para que os alunos façam o mesmo com os dados que eles coletaram no grupo, encontrando a média, a mediana e a moda.

Com a finalização dessa dinâmica, caso reste tempo na aula, disponibilizaremos para cada grupo uma lista de exercícios contendo diferentes maneiras de representação estatística, com questões similares às trabalhadas, visando consolidar o conteúdo trabalhado.

Referências:

HOLANDA, B. **Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra**. Rio de Janeiro, RJ: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2021.

ASTH, Rafael. Exercícios de Probabilidade (questões resolvidas e explicadas). **Toda Matéria**, *[s.d.]*. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/exercicios-sobre-probabilidade/. Acesso em: 6 ago. 2024

SCHOENFELD, A. Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), **Investigar para aprender matemática** (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT. 1996.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática e a Perspectiva Sócio-crítica. In: II SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, II, 2003, Santos. **Livro de Resumos.** Santos: SBEM, 2003. p. 135-144.

Relatório

A aula do dia 31 de agosto de 2024, realizada no PROMAT, contou com a presença de 16 alunos e teve como tema central a probabilidade e estatística. Iniciamos o encontro surpreendidos com notícia de que a professora Luiza, nossa colega de estágio, havia passado mal durante a noite e estava internada. Essa situação inesperada fez com que apenas os professores Ruan e Leonardo assumissem a responsabilidade de ministrar a aula. Esse imprevisto gerou um clima de apreensão tanto para os alunos quanto para nós, que precisávamos reorganizar a condução do conteúdo.

Outro contratempo surgiu logo no início: o controle do projetor da sala havia sido perdido no dia anterior, o que impossibilitou a utilização dos slides que havíamos preparado. Com isso, notamos que deveríamos improvisar e passar os exemplos e problemas preparados no quadro, alterando o ritmo previsto da aula.

Para iniciar o tema de probabilidade, dividimos os alunos em quartetos e propusemos a seguinte questão: "Escolhendo duas pessoas da sala, qual a chance de elas terem nascido no mesmo dia?". Observamos que os alunos enfrentaram um obstáculo epistemológico comum, inicialmente pensando que a probabilidade seria 1/365 * 1/365, o que reflete a chance de duas pessoas nascerem em um dia específico e pré-determinado. Aproveitamos essa situação para esclarecer que, na verdade, a chance de duas pessoas compartilharem o mesmo dia de aniversário é simplesmente 1/365, pois a primeira pessoa pode nascer em qualquer um dos dias do ano, a única condição é que a segunda pessoa nasça no mesmo dia, o que gerou uma discussão produtiva sobre a interpretação correta do problema.

Em seguida, ampliamos o questionamento para: "Qual a chance de terem nascido no mesmo mês?". Em retrospecto, percebemos que teria sido mais didático começar com essa pergunta, que é ligeiramente mais simples de interpretar, pois envolve menos possibilidades. Isso poderia ter facilitado a compreensão dos alunos e suavizado a transição para questões mais complexas.

Após essa breve discussão inicial, avançamos para a questão mais complexa: "Em uma sala de 16 pessoas, qual a chance de que duas delas compartilhem o dia de aniversário? E quantas pessoas são necessárias em uma sala para que haja 50% de chance de duas compartilharem o aniversário?". Este é o famoso problema do aniversário. Durante a explicação, entretanto, o professor Leonardo, de maneira inadvertida, revelou a resposta de que são necessárias 23 pessoas para que essa probabilidade atinja 50%. Embora tenhamos tentado reorientar a atividade para que os alunos explicassem o raciocínio por trás dessa resposta, percebemos que o entusiasmo dos alunos diminuiu, e a atividade perdeu parte de seu impacto. Notamos que seria mais eficaz ter permitido que os próprios alunos chegassem à conclusão, preservando o elemento de descoberta que é tão crucial no ensino de matemática.

Além disso, o tempo gasto nessa atividade foi significativamente maior do que o planejado, durando cerca de 40 minutos. Esse questionamento inicial, que deveria servir apenas como uma introdução breve ao tema, acabou se tornando uma atividade completa. Esse ajuste não planejado comprometeu o tempo destinado a outros conteúdos. Para aulas futuras, consideramos que seria mais eficaz avançar rapidamente na atividade e revisitá-la no final da aula ou reservá-la como uma discussão conclusiva, evitando que tomasse tanto tempo.

Por fim, o professor Leonardo tentou esclarecer a solução do problema do aniversário ao abordar a probabilidade contrária, ou seja, a probabilidade de duas pessoas não compartilharem o aniversário. No entanto, essa abordagem, ao invés de esclarecer as dúvidas, pareceu acentuá-las. Infelizmente, devido à necessidade de seguir o cronograma da aula, tivemos que prosseguir com o conteúdo, deixando alguns alunos ainda confusos. A falta de um passo-a-passo detalhado no plano de aula também foi sentida, pois poderia ter servido como um guia mais claro para essa explicação e ajudado a remediar a situação.

Os alunos, ao serem introduzidos ao tópico de probabilidade demonstraram certa dificuldade inicial em compreender o conceito. Nosso objetivo era apresentar primeiro aplicações práticas do conteúdo, permitindo que os alunos desenvolvessem intuitivamente os conceitos antes de formalizá-los. Contudo, alguns alunos manifestaram desconforto com essa abordagem, perguntando diretamente "quando iríamos explicar" o conteúdo formalmente. Eles sentiram falta de uma introdução teórica antes das atividades práticas. Diante dessa demanda, decidimos antecipar a entrega das apostilas de conteúdo, oferecendo-lhes a base teórica e exemplos resolvidos que pudessem consultar enquanto realizavam as atividades. Além disso, explicamos o conteúdo diretamente para grupos específicos conforme surgiam dúvidas, adaptando nosso plano original às necessidades emergentes da turma.

Após a atividade do problema do aniversário, introduzimos uma nova dinâmica com baralhos de cartas, onde os alunos puderam escolher entre dois jogos: pife ou truco. De acordo com suas preferências, entregamos a cada grupo uma folha com seis perguntas relacionadas a diferentes situações do respectivo jogo, solicitando que calculassem as probabilidades de cada evento ocorrer. Essa mudança foi implementada com base na nossa percepção de que a turma poderia avançar mais rapidamente pelo conteúdo do que o inicialmente planejado. No entanto, percebemos que as perguntas sobre os jogos se mostraram mais desafiadoras do que prevíamos.

Especificamente, nos grupos que escolheram pife, poucos alunos conseguiram avançar além da segunda pergunta, que questionava a probabilidade de começar o jogo com três pifes distintos formados por cartas iguais, dado uma mão inicial de nove cartas. Para resolver essa questão, era necessário aplicar conceitos de análise combinatória para determinar quantos "trios de trincas" poderiam ser formados. Essa dificuldade evidenciou um obstáculo didático remanescente da última aula, na qual os conceitos de combinação talvez não tenham sido suficientemente consolidados.

Em contraste, o grupo que escolheu truco conseguiu progredir de maneira mais ágil, apesar das perguntas serem igualmente desafiadoras. A separação de casos possíveis pareceu mais intuitiva para esse grupo, facilitando a resolução das questões. No entanto, com o avanço das atividades, notamos que os alunos começaram a compreender a probabilidade conforme esperado: como a razão entre o número de casos favoráveis de um evento e a quantidade total de casos possíveis.

Tal atividade do baralho se prolongou até após o intervalo, quando a interrompemos para que os grupos compartilhassem com a turma até que ponto resolveram e qual caminho utilizaram. Contudo, não realizamos uma correção total dos questionamentos em sala, por conta do tempo previsto para as próximas atividades, mas nos comprometemos em escrever as respostas em um documento e encaminhar aos alunos em nosso grupo de whatsapp durante a semana.

Dando sequência à aula, passamos os problemas que envolviam materiais manipuláveis diversos no quadro e pedimos que os alunos os respondessem. Tais problemas eram mais simples e cada um deles trabalhava apenas com um conceito essencial à probabilidade. Junto com a apostila de conceitos, os alunos não apresentaram dificuldade em resolver esses problemas. Notamos, no entanto, que poderia ter sido mais eficiente aplicar tais questionamentos inicialmente e deixar a atividade com o baralho, mais complexa, para um segundo momento. Após a solução desses problemas, fizemos uma leitura conjunta com os alunos sobre a apostila, para que eles sanassem as dúvidas sobre os conceitos que surgiam.

Finalmente, às 11 horas, iniciamos o conteúdo de estatística com uma breve descrição do que é a estatística, que descrevemos como a área da matemática que busca sistematizar conjuntos de dados em informações quantitativas únicas. Em seguida, entregamos a apostila com conceitos de estatística e passamos uma atividade prática em que os alunos deveriam medir os integrantes de seu grupo com fitas métricas e "buscar maneiras de descrever" os dados encontrados. Após essa discussão com seu grupo, pedimos que os quartetos se juntassem e discutissem como um conjunto maior, pedindo se notaram se a maneira que descreveram deve ser ajustada, ou se é possível manter a mesma descrição.

Como nesse momento foram formados apenas dois grupos, cada um possuindo em torno de 10 integrantes, cada professor acompanhou apenas um grupo. Assim, questionamos eles sobre como descreveram e formalizamos os conceitos utilizados. Nosso maior enfoque neste momento foram medidas de tendência central, apenas no final da aula comentamos sobre medidas de dispersão. Notamos uma facilidade consideravelmente maior dos alunos com os conceitos de estatística, a qual eles atribuem a "serem mais simples" e "maior uso de fórmulas". Percebemos também que a atividade prática de medir os colegas teve o efeito desejado: foi um momento para os alunos se descontrairem, vimos que eles ficaram interessados nesses dados e no que poderiam descobrir sobre a altura de seus colegas.

Em suma, foi uma aula com bastantes imprevistos de início, os quais alteraram o ritmo planejado da aula. Até o horário do intervalo, notamos que "lutamos" contra os imprevistos e nos esforçamos para voltar ao "ideal", algo que não gerou os resultados que queríamos e vimos que atrapalhou nossa explicação dos conceitos e capacidade de auxiliar os alunos nas atividades. Após o intervalo, conversamos entre nós e nos recompomos, aceitando as mudanças da aula e nos adaptando de uma maneira melhor para as necessidades dos alunos no momento. Assim, conseguimos seguir com o conteúdo de maneira mais fluida e dar a atenção devida aos conceitos necessários, o que ficou evidente com maior engajamento e compreensão dos alunos.

Materiais

- **Lista de exercícios**

1. Em uma experiência aleatória, foi lançado duas vezes um dado. Considerando que o dado é equilibrado, determine:
    a. A probabilidade de conseguir, no primeiro lançamento, o número 5 e, no segundo, o número 4.
    b. A probabilidade de obter, em pelo menos um dos lançamentos, o número 5.
    c. A probabilidade de obter a soma dos lançamentos igual a 5.
    d. A probabilidade de obter a soma dos lançamentos igual ou menor que 3.

2. Um saco contém 8 bolas de mesmo tamanho, mas com cores diferentes: três azuis, quatro vermelhas e uma amarela. Retira-se ao acaso uma bola. Qual a probabilidade da bola retirada ser azul?

3. Uma pesquisa realizada com 800 pessoas sobre a preferência pelos telejornais de uma cidade evidenciou que 200 entrevistados assistem apenas o telejornal A, 250 apenas o telejornal B e 50 assistem A e B. Das pessoas entrevistadas, qual a probabilidade de sortear ao acaso uma pessoa que assiste o telejornal A ou o telejornal B?

4. Qual a probabilidade de tirar um ás ao retirar ao acaso uma carta de um baralho com 52 cartas possuindo quatro naipes (copas, paus, ouros e espadas) sendo 1 ás em cada naipe?

5. Em uma urna há 5 bolas vermelhas e 4 pretas, todas do mesmo tamanho e feitas do mesmo material. Retiramos duas bolas sucessivamente da urna, sem repô-las. Qual é a probabilidade de que sejam retiradas duas bolas vermelhas?

6. Dois dados são lançados simultaneamente. Calcule a probabilidade de que a soma dos números das faces de cima seja 7.

7. São dispostos em uma fila duas meninas e quatro meninos. Qual a probabilidade de que as meninas não fiquem juntas?

8. Numa escola com 1.200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras: inglês e espanhol.

   Nessa pesquisa, constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas.

   Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

- **Apostila utilizada:** Anexos 2 e 3

8.1.

ENCONTRO 3 - 14/09/2024

Plano de aula

Público-Alvo: Alunos do segundo e terceiro anos

Tempo de execução: 4 horas-aula

Conteúdo: Matrizes e Determinantes

Objetivo Geral: Compreender conceitos relacionados a matrizes e determinantes, sua aplicação em diversos cenários e desenvolver estratégias para o cálculo de suas operações.

Objetivos Específicos:

- Reconhecer diferentes tipos de matrizes;
- Identificar igualdade entre matrizes;
- Efetuar operações em matrizes;
- Conhecer propriedades do determinante e efetuar seu cálculo para matrizes 2x2 e 3x3.

Recursos Didáticos: Quadro, giz, computador, projetor, slides, calculadora.

Encaminhamento metodológico:

Será desenvolvida uma metodologia investigativa para que os alunos percebam a necessidade e eficiência de representar dados de tabela em forma matricial. Para isso, iniciaremos a aula separando os alunos em grupos e apresentando em slide a seguinte situação:

Cada grupo representará uma comissão olímpica dos seguintes países: Estados Unidos, República Popular da China, Austrália, França e Brasil e, após o final das Olimpíadas de 2024, devem apresentar aos seus governos as informações referentes à quantia de medalhas que o seu país e os demais receberam, de forma a comparar e facilitar o entendimento. Um foco muito importante aqui é que tal informação será inserida em planilhas eletrônicas a fim de prestação de contas, então vocês devem buscar uma maneira

de organizar os dados que tanto uma pessoa como um computador possa entender com facilidade.

A relação de medalhas que a comissão recebeu foi a seguinte:

"Os **Estados Unidos da América** conquistaram 27 medalhas de ouro, 35 de prata e 33 de bronze. A **República Popular da China** conquistou 27 de ouro, 25 de prata e 17 de bronze. A **Austrália** conquistou 18 de ouro, 14 de prata e 11 de bronze. A **França** conquistou 13 de ouro, 17 de prata e 21 de bronze. O **Brasil** conquistou 2 medalhas de ouro, 5 de prata e 7 de bronze."

Assim, iremos pedir aos alunos como eles poderiam representar esses dados a partir das condições impostas. Junto a isso, pediremos para que os alunos tirem conclusões e informações sobre os dados apresentados que achem interessantes, tendo em mente que as aulas anteriores foram sobre estatística e probabilidade.

Feito isso, pediremos aos alunos que apresentem para a sala como foi feita a organização, as informações sobre os dados que encontraram e expliquem para a turma seu raciocínio e quais as vantagens e desvantagens de sua maneira de organizar.

Durante esse período, os professores caminharão pela sala observando o progresso e ideias dos alunos. Espera-se que, ao final, a maioria dos grupos chegue em um resultado semelhante à uma matriz, ou pelo menos uma tabela. Aos que apresentarem uma tabela, com título e demais informações, questionaremos sobre a possibilidade de um computador entender esses dados e também sobre a inserção em planilhas automaticamente. Perguntaremos se não acham que existe uma maneira de simplificar, apenas estipulando convenções sobre o que cada dado deve representar.

Junto a isso, iremos pedir para os alunos pensarem em uma maneira de representar e identificar os elementos de uma matriz sem necessariamente dizer qual elemento ele é. Com isso, queremos que eles comecem a pensar na posição dos elementos e na representação linha-coluna.

Esperamos que tal atividade dure 30 minutos.

Em seguida, após o diálogo entre os alunos, apresentaremos formalmente o conceito de matriz como

Dados dois números, *m* e *n*, naturais e não nulos, chama-se matriz *m* por *n* (indica-se $m \times n$) toda tabela *M* formada por números reais distribuídos em *m* linhas e *n* colunas e suas entradas são números reais.

$$M_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Assim, explicaremos que a representação que eles acabaram de criar é chamada de *matriz* e que, dada uma matriz, podemos representar seu elemento na linha *i*, e coluna *j* por $a_{i,j}$ e, em seguida, daremos um exemplo com uma matriz numérica e pediremos que os alunos nos indiquem qual elemento é, dada a representação por linha-coluna.

Na sequência, iremos comentar que existem diversos tipos de matrizes e que, a depender de sua quantidade de linhas e colunas e de suas entradas, recebem nomes especiais. Com isso, iremos entregar aos alunos uma folha (veja Anexo I) de informações contendo os seguintes tipos de matrizes, com exemplos de cada e uma definição formal: matrizes quadradas (de diversas ordens), matriz identidade, matriz nula, matriz linha, matriz coluna, matriz triangular e matriz diagonal.

Feito isso, daremos sequência às atividades no cenário da comissão olímpica. Comentaremos para os grupos as seguintes situações de maneira progressiva, à medida que solucionarem a situação anterior.

Soma de matrizes

A comissão, logo após finalizar seu relatório, recebeu os dados da competição de breaking, em que os **Estados Unidos da América** conquistaram a medalha de ouro, a **França** conquistou a medalha de prata e a **Austrália** conquistou o bronze. Ainda utilizando a representação de matrizes, como vocês fariam a atualização da matriz de quantia de medalhas? Existe alguma forma de sistematizar isso?

Subtração de matrizes
Após algumas suspeitas de trapaça, todos os atletas foram obrigados a fazerem testes de antidoping. Com isso, a comissão olímpica descobriu que dois atletas dos **Estados Unidos da América**, um com medalha de ouro e outro de bronze, e uma atleta da **França** tiveram resultado positivo no teste antidoping. Como os dados que você organizou nas tabelas mudam depois dessa revelação?

Produto de uma matriz completa por uma matriz coluna
Nota-se agora que cada país paga aos seus atletas R$ 350.000,00 por uma medalha de ouro, R$ 210.000,00 por medalha de prata e R$ 140.000,00 por medalha de bronze. O objetivo agora da comissão é descobrir quanto cada país vai gastar pagando aos seus atletas de acordo com as medalhas recebidas.

Com relação a esta atividade do produto de uma matriz completa por uma matriz coluna, devemos incentivar os alunos a notarem as ordens das operações que estão realizando e como podem sistematizar esse processo para um caso geral.

Mais do que isso, incentivaremos os alunos a realizarem o produto de acordo como seguinte exemplo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae & + & be \\ ce & + & df \end{bmatrix}$$

o qual buscaremos justificar, no presente caso, com a intuição deles de que o resultado deve ser "*a quantia que cada país ganhou de medalhas de ouro X o preço por medalha de ouro + a quantia que cada país ganhou de medalhas de prata X o preço por medalha de prata + a quantia que cada país ganhou de medalhas de bronze X o preço por medalha de bronze*", o que de fato ocorre:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 27 & 35 & 33 \\ 27 & 25 & 17 \\ 18 & 14 & 11 \\ 13 & 17 & 21 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 350.000 \\ 210.000 \\ 140.000 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 27 \cdot 350.000 & + & 35 \cdot 210.000 & + & 33 \cdot 140.000 \\ 27 \cdot 350.000 & + & 25 \cdot 210.000 & + & 17 \cdot 140.000 \\ 18 \cdot 350.000 & + & 14 \cdot 210.000 & + & 11 \cdot 140.000 \\ 13 \cdot 350.000 & + & 17 \cdot 210.000 & + & 21 \cdot 140.000 \\ 2 \cdot 350.000 & + & 5 \cdot 210.000 & + & 7 \cdot 140.000 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 17.262.000 \\ 17.038.000 \\ 9.394.000 \\ 8.414.000 \\ 1.848.000 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Neste momento, pediremos para os alunos identificarem alguma relação entre a dimensão da matriz resultado com a dimensão das matrizes utilizadas para fazer o produto. Queremos que eles notem que a multiplicação de uma matriz 5x3 por uma 3x1 resulta em uma matriz coluna 5x1, em que cada entrada representa o total que o país desembolsou com seus atletas.

Pediremos para que eles raciocinem se, ao realizar dessa maneira o produto, existe alguma restrição entre quais tipos de matrizes podemos multiplicar. Dessa maneira, queremos incentivá-los a notar que, para que seja possível efetuar a multiplicação, o número de colunas de uma matriz deve ser igual ao número de linhas da outra.

Pediremos para eles responderem, também, se a ordem em que foi realizada a operação importa, e qual seria o resultado se a ordem das matrizes fosse invertida (e se sequer seria possível).

Produto de uma matriz por um escalar
No entanto, calcular apenas o quanto deverá ser pago aos atletas não nos fornece o valor real final pois, ao retornar a seus países, os atletas deverão pagar 27.5% de imposto sobre o valor que receberam de premiação. Assim, qual é, e como representar em forma matricial, a quantia que cada país irá arrecadar em impostos do valor que pagarem em premiação?

Produto de duas matrizes completas
Logo, após pensarem que a comissão terminou todos os seus trabalhos, o presidente de seus países pediu uma última análise: é importante saber, além do valor que será pago no total aos atletas, a quantia total de patrocínios que foram arrecadados e o valor total pago por anúncios em TV aberta de acordo com o tipo de medalha. Com isso, vocês foram informados os seguintes acordos: Para cada medalha de ouro, o atleta recebe R$ 100.000 em patrocínios e o governo recebe R$ 70.000 em anúncios feitos em TV aberta. Por medalha de prata, o atleta recebe R$ 75.000 em patrocínios e o governo recebe R$ 60.000 em anúncios feitos em TV aberta. E, por medalha de bronze, o atleta recebe R$ 40.000 em patrocínios e o governo recebe R$ 50.000 em anúncios feitos em TV aberta. Agora, é preciso organizar essas informações (junto com o quanto cada governo vai ter de pagar para seus atletas no total) em uma única tabela, dando, finalmente, uma visão geral dos gastos e lucros do governo e dos atletas de cada país.

Com este último cenário, os alunos devem notar que o procedimento será similar ao feito apenas com a matriz coluna dos valores pagos aos atletas. No entanto, agora o produto da matriz de medalhas será feito por uma matriz em que cada coluna representa um dos novos valores a serem observados: valor pago para atletas, patrocínios recebidos e valor arrecadado por anúncios.

O procedimento será o mesmo, apenas o resultado agora será uma matriz 3x3, em que cada coluna representa o gasto total entre as categorias e cada linha continua sendo cada país. Segue o exemplo com método de resolução esperado:

$$\begin{bmatrix} 27 & 35 & 33 \\ 27 & 25 & 17 \\ 18 & 14 & 11 \\ 13 & 17 & 21 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 350.000 & 100.000 & 70.000 \\ 210.000 & 75.000 & 60.000 \\ 140.000 & 40.000 & 50.000 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 27 & 35 & 33 \\ 27 & 25 & 17 \\ 18 & 14 & 11 \\ 13 & 17 & 21 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 350.000 \\ 210.000 \\ 140.000 \end{bmatrix} \bigoplus \begin{bmatrix} 27 & 35 & 33 \\ 27 & 25 & 17 \\ 18 & 14 & 11 \\ 13 & 17 & 21 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100.000 \\ 75.000 \\ 40.000 \end{bmatrix} \bigoplus \begin{bmatrix} 27 & 35 & 33 \\ 27 & 25 & 17 \\ 18 & 14 & 11 \\ 13 & 17 & 21 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 70.000 \\ 60.000 \\ 50.000 \end{bmatrix}$$

$$= 10^3 \begin{bmatrix} 27 \cdot 350 + 35 \cdot 210 + 33 \cdot 140 & 27 \cdot 100 + 35 \cdot 75 + 33 \cdot 40 & 27 \cdot 70 + 35 \cdot 60 + 33 \cdot 50 \\ 27 \cdot 350 + 25 \cdot 210 + 17 \cdot 140 & 27 \cdot 100 + 25 \cdot 75 + 17 \cdot 40 & 27 \cdot 70 + 25 \cdot 60 + 17 \cdot 50 \\ 18 \cdot 350 + 14 \cdot 210 + 11 \cdot 140 & 18 \cdot 100 + 14 \cdot 75 + 11 \cdot 40 & 18 \cdot 70 + 14 \cdot 60 + 11 \cdot 50 \\ 13 \cdot 350 + 17 \cdot 210 + 21 \cdot 140 & 13 \cdot 100 + 17 \cdot 75 + 21 \cdot 40 & 13 \cdot 70 + 17 \cdot 60 + 21 \cdot 50 \\ 2 \cdot 350 + 5 \cdot 210 + 7 \cdot 140 & 2 \cdot 100 + 5 \cdot 75 + 7 \cdot 40 & 2 \cdot 70 + 5 \cdot 60 + 7 \cdot 50 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 17262000 & 6645000 & 5640000 \\ 17038000 & 6005000 & 4840000 \\ 9394000 & 3290000 & 2650000 \\ 8414000 & 3415000 & 2980000 \\ 1848000 & 855000 & 790000 \end{bmatrix}$$

em que $\oplus$ representa a concatenação das matrizes. Esperamos que essa maneira de multiplicar matrizes seja mais intuitiva para os alunos e dê sentido ao "algoritmo" tradicional.

Tal atividade de investigação deve durar até o intervalo. Voltando do intervalo, utilizaremos ainda 25 minutos para discutir em conjunto os resultados obtidos e as noções sobre operações com matrizes desenvolvidas por cada grupo.

Após essa atividade, iremos introduzir o determinante, falando que toda matriz quadrada têm a si associada um número real, chamado de *determinante.*

Determinante da matriz quadrada de ordem 1
Dado uma matriz $A = [a]$, seu determinante é idêntico ao seu único elemento, dizemos então que $\det A = a$, ou também que $\|A\| = a$

Determinante da matriz quadrada de ordem 2
Dado uma matriz quadrada da forma $$B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$ Seu determinante é obtido pela diferença entre a multiplicação da diagonal principal, com a diagonal secundária. Representamos isso como det $B = ad - bc$ ou $\lvert B \rvert = ad - bc$

Determinante da matriz quadrada de ordem 3
Dado uma matriz quadrada da forma $$C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$ Seu determinante pode ser determinado de várias formas, a forma que iremos utilizar é pela lei de Sarrus, explicaremos para os alunos o procedimento de pegar as duas primeiras colunas e reescrevê-las em frente à matriz, como se fossem “quartas” e “quintas” colunas. Depois disso faríamos as diagonais, somando as que vão de cima para baixo, e subtraindo as que vão de baixo para cima.

Depois de explicarmos a forma de calcular-se determinantes, iremos pedir que tentem fazer exemplos de diferentes matrizes, para ver se percebem algumas propriedades ou regularidades dentro do determinante.

Referências:

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar volume 4 : sequências, matrizes, determinantes, sistemas**. 8. ed. São Paulo: Editora Atual, 2022. v. 4

RIGONATTO, M**. "Propriedades dos Determinantes";** Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/propriedades-dos-determinantes.htm. Acesso em 09 de agosto de 2024.

ANDRADE, M; ARANTE, M. **Saiba em quanto Rebeca Andrade será taxada por premiação olímpica**. Metrópoles. Disponível em: https://www.metropoles.com/esportes/olimpiadas-2024/saiba-em-quanto-rebeca-andrade-sera-taxada-por-premiacao-olimpica. Acesso em 08 de agosto de 2024.

Quadro de medalhas. International Olympics Committee. Disponível em https://olympics.com/pt/paris-2024/medalhas. Acesso em 08 de agosto de 2024.

CARNEIRO, M. **Mapas Mentais: Matriz**. Projeto Agatha. Disponível em https://projetoelisa.com.br/app/mapas-mentais-de-matematica/matrizes.php. Acesso em 08 de agosto de 2024.

SCHOENFELD, A. **Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?**. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), Investigar para aprender matemática (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT. 1996.

DANTE, L. **Matemática contexto e aplicações volume único**. [s.l.] Editora Ática, 2018.

PONTE, J. P. DA. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 4. ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica Editora, 2021.

Relatório

A aula do dia 14 de setembro de 2024 teve a presença de 15 alunos, um aluno a menos do que o anterior. Como o tópico central que seria trabalhado na semana seria matrizes, um tópico que, segundo os alunos, eles têm dificuldade, buscamos alguma referência que ajude os alunos a entender melhor o conteúdo. Durante o planejamento da aula, as olimpíadas de 2024 estavam acontecendo, assim sendo decidimos fazer o foco principal da nossa aula uma exploração na qual os alunos estariam lidando com matrizes no ambiente no qual elas surgiram, o ambiente tabular, levando-os às propriedades de matrizes de uma forma natural.

A aula começou com a introdução do tópico, e explicamos que nessa aula eles seriam ‘parte da comissão olímpica’, com o trabalho de classificar e categorizar cada medalha ganha por cada país. Separamos os alunos em 3 grupos de 5 pessoas, e cada professor ficou cuidando de um grupo de maneira mais próxima, enquanto passando pelos outros de forma mais passiva. Auxiliando os grupos, todos chegaram na mesma forma de representação, a representação tabular, com uma única distinção, não haviam concordado qual categoria deveria ser a coluna e qual deveria representar a linha, com alguns colocando o país como a coluna e a medalha como a linha, e outros vice-versa.

Com essas respostas formalizamos o conceito de uma matriz, conectando-a diretamente à representação de dados de maneira tabular. O professor Ruan estabelceu a conexão dessa forma de representação à maneira com qual computadores lidam com dados, e os alunos parecem entender essa motivação para essa forma de representação. Explicou também por que quando se trabalha com dados, é geralmente melhor trabalhar com atualização de dados existentes, raramente com a substituição dos dados existentes, por questões de segurança e de preservação de informação. Essa motivação e explicação, descobrimos depois no próximo tópico de soma de matrizes, fez com que os alunos chegassem eles mesmos na forma e nas propriedades da soma de matrizes.

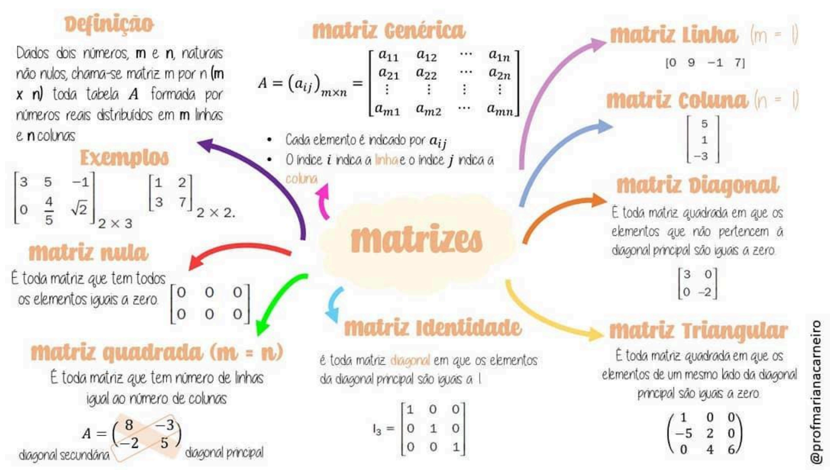
Apresentamos a sequência dessa situação, que mais jogos haviam acontecido, e que alguns países ganharam medalhas, enquanto alguns perderam por testes de doping, e pedimos que os alunos chegassem à uma maneira de representação que atualizasse os dados já existentes, como seria necessário para um banco de dados, uma aluna apresentou a solução dela para isso em frente à turma, e eles pareceram entender a resolução dela bem.

Para dar sequência a essa investigação, introduzimos o problema de calcular quanto cada país teria de pagar para seus atletas no total, dando à eles um número para representação de quanto cada medalha custaria ao país, que fez com que eles chegassem de forma intuitiva à uma forma inicial do algoritmo de multilplicação de matrizes. Pedimos que os alunos compartilhassem a forma com a qual chegaram no resultado final com a turma, uma aluna foi até o quadro e explicou as etapas que ela fez para chegar o resultado final, multilplicando todos os elementos da coluna da medalha de bronze pelo preço da medalha de bronze, todos os elementos da coluna da medalha de prata pelo preço da medalha de prata, a coluna da medalha de ouro pelo preço da medalha de ouro, e juntando todas essas colunas novamente. Essa forma que ela utilizou para explicar levou diretamente à maneira que pretendíamos explicar multiplicação de matrizes completas, envolvendo a multiplicação de várias matrizes coluna.

Verificamos que os slides não estavam batendo com os números que haviamos colocado no plano, ou seja os alunos tinham resultados diferentes do que estava sendo listado nos slides. Começamos a nossa explicação de multiplicação de matrizes com um pedido para que pensem na diferença entre linha e coluna, e como isso influencia nos resultados na hora de multiplicar duas matrizes, e o que elas significam. Explicamos que quando multiplicamos uma matriz, o número de colunas na segunda matriz tem que ser igual ao número de linhas na segunda matriz, e além disso devem se referir à mesma quantidade. Os alunos pareceram entender essa ideia, e alguns comentaram que foram capazes de entender o conceito de multiplicação matrizes mais fácilmente, que o consideraram 'legal'. Terminamos a aula com dois exercícios, e entregamos uma lista de tarefa de casa que reforçava os conceitos que foram trabalhados em sala.

Materiais utilizados

Figura 1: Mapa mental



Fonte: https://projetoelisa.com.br/app/mapas-mentais-de-matematica/matrizes.php

Figura 2: Quadro de medalhas olímpicas

Ordem	CONs	O	P	B	
1	Estados Unidos da América	27	35	33	**95**
2	República Popular da China	27	25	17	**69**
3	Austrália	18	14	11	**43**
4	França	13	17	21	**51**
18	Brasil	2	5	7	**14**

Fonte: https://olympics.com/pt/paris-2024/medalhas

- Lista de Exercícios:

LISTA DE EXERCÍCIOS

1. (UEL-PR) Uma nutricionista recomendou aos atletas de um time de futebol a ingestão de uma quantidade mínima de certos alimentos (fruta, leite e cereais) necessária para uma alimentação sadia. A matriz

$$D = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 600 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} cereais \\ leite \\ frutas \end{array} \end{array}$$

fornece a quantidade diária mínima (em gramas) daqueles alimentos.
A matriz

$$M = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccc} fruta & leite & cereais \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0{,}006 & 0{,}033 & 0{,}108 \\ 0{,}001 & 0{,}035 & 0{,}018 \\ 0{,}084 & 0{,}052 & 0{,}631 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} proteínas \\ gorduras \\ carboidratos \end{array} \end{array}$$

fornece a quantidade (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos presente em cada grama ingerida dos alimentos citados. Escreva a matriz que mostra a quantidade diária mínima (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida pela ingestão daqueles alimentos.

2. (Unicamp) Sejam a e b números reais tais que a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ satisfaz a equação $A^2 = aA + bI$, em que I é a matriz identidade de ordem 2. Logo, qual é o valor do produto ab?

3. UFSM

O diagrama dado representa a cadeia alimentar simplificada de um determinado ecossistema. As setas indicam a espécie de que a outra espécie se alimenta. Atribuindo valor 1 quando uma espécie se alimenta de outra e zero, quando ocorre o contrário, tem-se a seguinte tabela:

	Urso	Esquilo	Inseto	Planta
Urso	0	1	1	1
Esquilo	0	0	1	1
Inseto	0	0	0	1
Planta	0	0	0	0

A matriz A = $(a_{ij})_{4x4}$, associada à tabela, possui a seguinte lei de formação:

a) $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \leq j \\ 1, \text{ se } i > j \end{cases}$

b) $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i = j \\ 1, \text{ se } i \neq j \end{cases}$

c) $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \geq j \\ 1, \text{ se } i < j \end{cases}$

d) $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i \neq j \\ 1, \text{ se } i = j \end{cases}$

e) $a_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ se } i < j \\ 1, \text{ se } i > j \end{cases}$

4. (UNICAMP 2014) Considere a matriz A= $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & b \\ c & -2 & 0 \end{bmatrix}$ onde a, b e c são números reais.

a) Encontre os valores de a, b e c de modo que $A^t = -A$.

b) Dados a=1 e b= -1, para que valores de c e d o sistema linear $A * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ d \end{bmatrix}$ tem infinitas soluções?

5. (UEL) A soma dos determinantes indicados a seguir é igual a zero

$$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -a & -b \\ b & a \end{vmatrix}$$

a) quaisquer que sejam os valores reais de a e de b.
b) se e somente se a = b.
c) se e somente se a = -b.
d) se e somente se a = 0.
e) se e somente se a = b = 1.

6. "(UEL – PR) Uma das formas de se enviar uma mensagem secreta é por meio de códigos matemáticos, seguindo os passos:
1. Tanto o destinatário quanto o remetente possuem uma matriz chave C;
2. O destinatário recebe do remetente uma matriz P, tal que MC=P, onde M é a matriz mensagem a ser decodificada;
3. Cada número da matriz M corresponde a uma letra do alfabeto: 1=a, 2=b, 3=c, ..., 23=z;
4. Consideremos o alfabeto com 23 letras, excluindo as letras, k, w e y.

5. O número zero corresponde ao ponto de exclamação.
6. A mensagem é lida, encontrando a matriz M, fazendo correspondência número/letra e ordenando as letras por linhas da matriz conforme segue: m11m12m13m21m22m23m31m32m33.
Considere as matrizes:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \; e \; P = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 1 \\ 18 & 38 & 17 \\ 19 & 14 & 0 \end{pmatrix}$$

Com base nos conhecimentos e nas informações descritas, qual é a mensagem que foi enviada por meio da matriz M.

7. (PM ES – AOCP). Para saber o custo total (em reais) na produção de x uniformes para um grupo de soldados, primeiramente substitui-se cada elemento x, da matriz a seguir, pela quantidade de uniformes que se quer produzir, e calcula-se o determinante dessa matriz, obtendo-se, assim, o custo total na produção destes x uniformes é igual ao valor do determinante.

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 100 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, para se produzir 70 uniformes para um grupo de soldados, o custo total nessa produção será de

a) R$ 4100.

b) R$ 3500.

c) R$ 3100.

d) R$ 2500.

e) R$ 2100.

8. (Uesp) Se o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ k & k & k \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ é igual a 10, então o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ k+4 & k+3 & k-1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ é igual a:

a) 7

b) 8

c) 9

d) 10

e) 11

ENCONTRO 4 – 21/09/2024

Plano de aula

Público-Alvo: Alunos do segundo e terceiro anos

Tempo de execução: 4 horas-aula

Conteúdo: Sistemas lineares

Objetivo Geral: Abordar noções de sistemas lineares e métodos de resolução a partir de atividades investigativas

Objetivos Específicos:

- Integrar a representação matricial com a tabular;
- Apresentar noções intuitivas da resolução de sistemas lineares;
- Explorar representações e soluções gráficas de sistemas lineares;
- Sistematizar métodos de solução de sistemas lineares;
- Institucionalizar a definição de equações e sistemas lineares, bem como sua solução;

Recursos Didáticos: Quadro, giz, projetor, material impresso, slides.

Metodologia:

Essa aula será feita por meio de uma metodologia exploratória baseada na investigação matemática e resolução de problemas segundo a perspectiva de Ponte (2021), na qual os alunos são primeiramente apresentados com um problema antes de serem dados tempo para resolvê-los.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos a aula com o seguinte exercício introdutório.

Um jovem viu uma promoção do seu sabor favorito de Monster™ em uma loja, o total de sua compra foi R$7,00. Porém, como estava sem celular, utilizou "PIXs físicos" de R$1,00 e R$2,00. Para realizar o pagamento, ele usou um total de 5 cédulas. Quantas de cada cédula ele usou?

Visamos que esse exercício seja simples, resolvível em questão de poucos minutos; Mas iremos utilizar ele para introduzir o conceito do que significa realmente uma “solução de sistema linear”. Utilizaremos uma ideia que foi apresentada em Pontes (2021), para exemplificar o processo resolutivo de um sistema de equações de uma maneira que seja intuitiva e visual para os alunos.

Aqui, iremos entregar tiras de papel com as seguintes definições formalizadas de equações e sistemas lineares:

Definição. Equação linear (IEZZI, 2022).
Definimos como uma equação linear toda equação do tipo $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + ... + a_{1n}x_n = b$. Nela, os número $a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n}$ são todos reais e chamados de coeficientes e b, também real, é chamado de termo independente.

Definição. Sistema linear (IEZZI, 2022).
É um conjunto de m $(m \geq 1)$ equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$. Assim, o sistema $S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ é linear.

Iremos utilizar deste momento para definir o que é a *solução* de um sistema linear:

Definição. Solução de sistema linear (IEZZI, 2022).
Dizemos que uma *n-upla* de números $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ é a solução de um sistema linear se essa sequência for solução de *todas* as equações lineares presentes.

E exemplificaremos com a solução encontrada pelos alunos do exercício introdutório.

Depois disso, iremos passar para os problemas, projetando-os em sala, visamos que essa parte da aula seja feita em quartetos dentro da sala, com cada professor auxiliando grupos com perguntas motivadoras que levem os alunos à resolução, sem passar a resposta.

Problema 1:

Cada grupo representará uma comissão olímpica dos seguintes países: Estados Unidos, República Popular da China, Austrália, França e Brasil e, após o final das Olimpíadas de 2024, devem apresentar aos seus governos as informações referentes à quantia de medalhas que o seu país e os demais receberam, de forma a comparar e facilitar o entendimento.

A relação de medalhas que a comissão recebeu foi a seguinte: "Os **Estados Unidos da América** conquistaram 27 medalhas de ouro, 35 de prata e 33 de bronze. A **República Popular da China** conquistou 27 de ouro, 25 de prata e 17 de bronze. A **Austrália** conquistou 18 de ouro, 14 de prata e 11 de bronze. A **França** conquistou 13 de ouro, 17 de prata e 21 de bronze. O **Brasil** conquistou 2 medalhas de ouro, 5 de prata e 7 de bronze."

Como recompensa pelos seus esforços por seus países, cada país pagou a cada atleta vencedor de uma medalha um certo valor dependendo do tipo de medalha. Os gastos por cada país são apresentados na tabela a seguir.

País	Quantidade gasta (R$)
Estados Unidos	17.262.000
República Popular da China	17.038.000
Austrália	9.394.000
França	8.414.000
Brasil	1.848.000

Qual o valor que os países pagaram por cada tipo de medalha?

Para resolver o problema proposto, foi necessário o uso de *todas* as informações dadas?

Durante a resolução deste problema é esperado que os professores façam perguntas do tipo, “Seria possível resolver se tivéssemos menos países?”, “Qual o número mínimo de países?”. Esperamos que, como esse problema foi lidado na aula anterior, os alunos se sintam encorajados a escrevê-lo de forma matricial.

Após a resolução deste problema em sala, iremos projetar o problema 2:

Problema 2:

As livrarias **A, B, C** e **D** de uma cidade vendem livros de Matemática do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, de uma mesma coleção, com preço comum estabelecido pela editora. Os dados de venda diárias são os seguintes:

Livrarias	Número de livros vendidos				Valor total recebido
	6° Ano	7° Ano	8° Ano	9° Ano	
A	2	2	3	2	563,10
B	2	1	2	4	566,10
C	0	5	0	0	304,50
D	3	2	5	1	687,90

Qual o preço de cada um dos livros na coleção? Mostre pelo menos *duas* maneiras diferentes de chegar na mesma solução.

Durante a resolução esperamos que os professores reforcem o fato de que “resolver linhas diferentes” não é uma maneira diferente de chegar na solução. Esperamos que os alunos cheguem ao método da substituição ao menos, possivelmente o da adição.

Para deixar isso mais provável os docentes devem fazer perguntas motivadoras da forma “Caso você adicione linhas dentro do sistema, o resultado mudará?”, “Multiplicando uma linha inteira por uma constante altera o valor final do sistema?”, “Caso você encontre o valor de uma das variáveis, o valor é alterado se você substituir ela na outra equação?”, “Isolar uma variável em um lado muda alguma coisa?”

Problema 3:

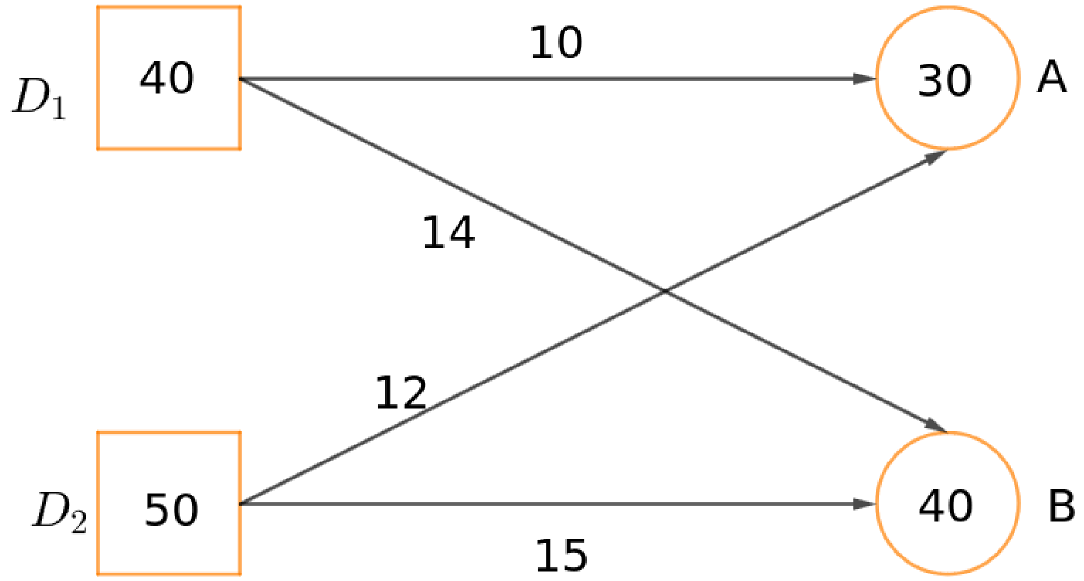
O quadro abaixo elucida o número de carros e motos em um estacionamento, bem como o número de rodas dos respectivos veículos. Explore-a de acordo com o roteiro abaixo.

Carros+Motos	Rodas Carros	Rodas Motos	Total de Rodas
1+10	4	20	24
2+9	8	18	26
3+8	12	16	28
4+7	16	14	30
5+6	20	12	32
6+5	24	10	34
7+4	28	8	36
8+3	32	6	38
9+2	36	4	40
10+1	40	2	42

A. À medida que o número de carros aumenta, o que acontece com o número de rodas dos carros? E à medida que se aumenta o número de motos, o que acontece com o número de rodas das motos?
B. Há alguma relação entre o aumento do número de rodas de carros e o aumento do número de rodas de motos? Se sim, qual?
C. Por que ao diminuir o número de motos, o número total de rodas dos veículos do estacionamento continua aumentando?
D. Há alguma relação matemática que permita descobrir o número de carros e o número de motos do estacionamento, sabendo-se apenas o número total de rodas? Se sim, qual?

Problema 4:

Uma firma comercial tem 40 unidades de mercadoria no depósito D_1 e 50 unidades no depósito D_2. Ela deve enviar 30 unidades para o cliente **A** e 40 ao cliente **B.** Os gastos de transporte por unidade de mercadoria estão indicados no esquema abaixo. De que maneira essas mercadorias devem ser enviadas para que o gasto com transporte seja mínimo?



Esperamos desenvolver a capacidade de matematização de problemas dos alunos, e as técnicas que eles aprenderam de resolução de problemas quando fizerem-no.

Após a resolução desse último problema, iremos passar uma folha impressa contendo a formalização de cada um desses problemas, e comentaremos as suas resoluções em sala, essa folha segue no Anexo I. Depois de formalizado, nossa aula estará acabada, entregaremos aos alunos a lista de exercícios de tarefa, ou faremos-a em sala caso tenhamos tempo de sobra.

Referências:

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar volume 4 : sequências, matrizes, determinantes, sistemas**. 8. ed. São Paulo: Editora Atual, 2022. v. 4

SCHOENFELD, A. **Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?**. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), Investigar para aprender matemática (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT. 1996.

DANTE, L. R. **Matemática - contexto e aplicações**. São Paulo: Editora Ática, 2021. v. 2.

PONTE, J. P. DA. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 4. ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica Editora, 2021.

Pontes, E. A. S. (2021). Noção intuitiva no ato de ensinar e aprender matemática por meio de uma atividade de ensino de sistemas lineares com coeficientes positivos . **Revista Baiana De Educação Matemática, 2(01), e202106.** https://doi.org/10.47207/rbem.v2i01.11286

Relatório

Começamos a aula às 08:00, como de costume, com a presença de 16 alunos, organizados em 4 grupos de 4. Iniciamos com um exercício introdutório sobre sistemas lineares: um adolescente fez uma compra de R$ 7,00 e pagou usando 5 cédulas de R$ 1,00 e R$ 2,00. Os alunos deveriam determinar quantas cédulas de cada valor foram utilizadas. Como esperado, resolveram rapidamente.

Em seguida, distribuímos o material com o conteúdo teórico e usamos esse momento para definir equação linear, sistema linear e solução de um sistema linear, exemplificando com o exercício inicial. Depois, projetamos os problemas a serem trabalhados. Mantivemos o tema das Olimpíadas da aula anterior e pedimos que cada grupo escolhesse representar um país: Estados Unidos, China, Austrália, França ou Brasil. Exibimos o número de medalhas de ouro, prata e bronze conquistadas por cada nação e introduzimos a ideia de que a comissão olímpica recompensaria financeiramente seus medalhistas. Em seguida, apresentamos o gasto total de cada país com essas premiações e desafiamos os alunos a descobrir quanto foi pago por cada tipo de medalha.

Durante a atividade, acompanhamos os grupos e incentivamos a reflexão com perguntas como: "Seria possível resolver com menos países?" e "Qual o número mínimo de países necessário para encontrar os valores?". Os alunos rapidamente organizaram os dados em matrizes, mas, ao final, os resultados obtidos eram inconsistentes, com valores negativos ou desproporcionais. Ao revisar, identificamos um erro nos valores iniciais fornecidos. Como já era o horário do intervalo, liberamos os alunos enquanto corrigíamos a questão. Ao retornarem, explicamos o equívoco, pedimos desculpas e ajustamos os cálculos.

O próximo problema envolvia quatro livrarias responsáveis pela venda de livros de matemática do Ensino Fundamental em uma cidade. Os alunos receberam uma tabela com o número de livros vendidos por cada livraria e o valor total arrecadado. A tarefa era determinar o preço de cada livro. Durante a resolução, reforçamos conceitos fundamentais de sistemas lineares com questões como: "Se adicionarmos novas equações ao sistema, o resultado muda?" e "Multiplicar uma equação por uma constante altera a solução?". Os alunos resolveram esse problema com mais facilidade do que o anterior, atribuindo isso ao fato de que os valores eram menores, tornando os cálculos mais simples.

Após a correção no quadro, passamos para um terceiro desafio: uma tabela com a quantidade de carros e motos em um estacionamento em diferentes momentos, além do número total de rodas contadas. O objetivo não era apenas calcular, mas identificar padrões e interpretar seu significado. Cada grupo teve tempo para debater suas conclusões antes da correção oral.

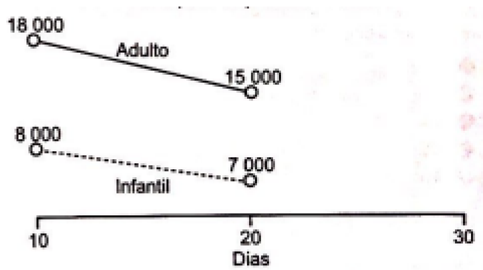
Por fim, apresentamos um último problema, no qual uma empresa com dois depósitos precisava enviar mercadorias para dois clientes, com custos de transporte variados dependendo da origem e destino. Os alunos deveriam determinar a melhor distribuição dos produtos para minimizar os gastos da empresa. Rapidamente transcreveram os dados em um sistema linear e resolveram sem dificuldades, o que nos deixou satisfeitos com o progresso deles.

Finalizamos a aula corrigindo o exercício no quadro e entregando um material impresso com a formalização e comentários sobre os quatro problemas resolvidos. Para encerrar, distribuímos uma lista de exercícios para a próxima aula, agradecemos a participação dos alunos e os dispensamos.

Materiais utilizados

- **Lista de exercícios:**

1. (ENEM 2022) Uma loja de roupas fixou uma meta de vendas de 77 000 reais para um determinado mês de 30 dias. O gráfico mostra o volume de vendas dessa loja, em real, nos dez primeiros dias do mês e entre o dia dez e o dia vinte desse mês, nos seus dois únicos setores (infantil e adulto). Suponha que a variação no volume de vendas, para o período registrado, tenha se dado de forma linear, como mostrado no gráfico, e que essa tendência se mantenha a mesma para os próximos dez dias.



Ao final do trigésimo dia, quanto faltará no volume de vendas, em real, para que a meta fixada para o mês seja alcançada?

2. (ENEM 2018) Durante uma festa de colégio, um grupo de alunos organizou uma rifa. Oitenta alunos faltaram à festa e não participaram da rifa. Entre os que compareceram, alguns compraram três bilhetes, 45 compraram 2 bilhetes, e muitos compraram apenas um. O total de alunos que comprou um único bilhete era 20% do número total de bilhetes vendidos, e o total de bilhetes vendidos excedeu em 33 o número total de alunos do colégio. Quantos alunos compraram somente um bilhete?

3. (ENEM 2013) Uma fábrica de fórmicas produz placas quadradas de lados de medida igual a y centímetros. Essas placas são vendidas em caixas com N unidades e, na caixa, é especificada a área máxima S que pode ser coberta pelas N placas. Devido a urna demanda do mercado por placas maiores, a fábrica triplicou a medida dos lados de suas placas e conseguiu reuni-las em uma nova caixa, de tal forma que a área coberta S não fosse alterada. Qual será a quantidade de placas do novo modelo, em cada nova caixa?

4. (ENEM 2018) Uma loja vende automóveis em N parcelas iguais sem juros. No momento de contratar o financiamento, caso o cliente queira aumentar o prazo, acrescentando mais 5 parcelas, o valor de cada uma das parcelas diminui R$ 200,00, ou se ele quiser diminuir o prazo, com 4 parcelas a menos, o valor de cada uma das parcelas sobe R$ 232,00. Considere ainda que, nas três possibilidades de pagamento, o valor do automóvel é o mesmo, todas são sem juros e não é dado desconto em nenhuma das situações. Nessas condições, qual é a quantidade N de parcelas a serem pagas de acordo com a proposta inicial da loja?

5. (ENEM 2020) Em um país, as infrações de trânsito são classificadas de acordo com sua gravidade. Infrações dos tipos *leves* e *médias* acrescentam, respectivamente, 3 e 4 pontos na carteira de habilitação do infrator, além de multas a serem pagas. Um motorista cometeu 5 infrações de trânsito. Em consequência teve 17 pontos acrescentados em sua carteira de habilitação. Qual é a razão entre o número de infrações do tipo *leve* e o número de infrações do tipo *média* cometidas por esse motorista?

6. (ENEM 2013) Um dos grandes problemas enfrentados nas rodovias brasileiras é o excesso de carga transportada pelos caminhões. Dimensionado para o tráfego dentro dos limites legais de carga, o piso das estradas se deteriora com o peso excessivo dos caminhões. Além disso, o excesso de carga interfere na capacidade de frenagem e no funcionamento da suspensão no veículo, causas frequentes de acidentes. Ciente dessa responsabilidade e com base na experiência adquirida com pesagens, um caminhoneiro sabe que seu caminhão pode carregar, no máximo, 1500 telhas ou 1200 tijolos. Considerando esse caminhão carregado com 900 telhas, quantos tijolos, no máximo, podem ser acrescentados à carga de modo a não ultrapassar a carga máxima do caminhão?

7. (ENEM 2009 - Adaptado) Diante de um sanduíche e de uma porção de batatas fritas, um garoto, muito interessado na quantidade de calorias que pode ingerir em cada refeição, analisa os dados de que dispõe. Ele sabe que a porção de batatas tem 200 g, o que equivale a 560 calorias, e que o sanduíche tem 250 g e 500 calorias. Como ele deseja comer um pouco do sanduíche e um pouco das batatas, ele se vê diante da questão: “Quantos gramas de sanduíche e quantos gramas de batata eu posso comer para ingerir apenas as 462 calorias permitidas para esta refeição?”.

   Dado isso, e considerando também que uma porção de batatas contém 82 gramas de carboidratos, e uma porção do sanduíche contém 65 gramas de carboidrato, buscando comer sua quantidade ideal de batatas e sanduíche, enquanto visa consumir exatamente 40 gramas de carboidrato; qual a quantidade de sanduíche e batatas que deve consumir?

8. (ENEM 2009) Um grupo de 50 pessoas fez um orçamento inicial para organizar uma festa, que seria dividido entre elas em cotas iguais. Verificou-se ao final que, para arcar com todas as despesas, faltavam R$ 510,00, e que 5 novas pessoas haviam ingressado no grupo. No acerto foi decidido que a despesa total seria dividida em partes iguais pelas 55 pessoas. Quem não havia ainda contribuído pagaria a sua parte, e cada uma das 50 pessoas do grupo inicial deveria contribuir com mais R$ 7,00. De acordo com essas informações, qual foi o valor da cota calculada no acerto final para cada uma das 55 pessoas?

- **Apostila utilizada:** Anexo 4

ENCONTRO 5 – 28/09/2024

Plano de aula

Público-Alvo: Alunos do segundo e terceiro anos

Tempo de execução: 4 horas-aula

Conteúdo: Sistemas lineares

Objetivo Geral: Abordar a solução gráfica de sistemas lineares a partir de atividades investigativas com base em tecnologias.

Objetivos Específicos:

- Reforçar os conceitos de definição e métodos de resolução de sistemas lineares.
- Explorar soluções gráficas de sistemas lineares 2x2, utilizar o ambiente gráfico para que os alunos visualizem a representação geométrica de soluções de sistemas, reforçando a interpretação visual de retas e seus pontos de interseção.
- Desenvolver habilidades na transcrição de sistemas para o plano cartesiano. Levar os alunos a construir sistemas de equações a partir de descrições e resolver graficamente.
- Compreender os três diferentes tipos de sistemas lineares.

Recursos didáticos: Quadro, giz, material impresso, laboratório de informática, software gráfico (Desmos).

Encaminhamento metodológico:

A abordagem metodológica desta aula está fundamentada em princípios da educação matemática que valorizam o aprendizado ativo, a visualização e a contextualização. O uso de ambientes digitais interativos, como o Desmos. Nos baseamos na proposta de ensino apresentada por Santos, Souza e Alves (2024), modificando-a para o uso das "*Desmos Classroom*", atividades fornecidas pela equipe do Desmos e que nós traduzimos para o português.

A partir do uso de tecnologias, também, incentivar o reconhecimento de diferentes tipos de registros por parte dos alunos, notando a importância de atividades deste tipo apresentadas por Pantoja, Campos e Salcedos (2013).

Sequenciamento da aula:

Iremos realizar esta aula no Laboratório de Informática, seguindo o sequenciamento didático de quatro "Atividades de Sala", oferecidas pela equipe do Desmos. As atividades realizadas serão, em ordem:

1. https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/66d77bc22e794c2bc1bdf711?lang=pt-BR
2. https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/66f705ff230a8564a41ff1cd?lang=pt-BR
3. https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/66d776bbba28ae503004cf0d?lang=pt-BR
4. https://teacher.desmos.com/activitybuilder/custom/66d778ab3e81fc64d7dd7d17?lang=pt-BR

Encaminhar aos alunos os seguintes links:

1. https://student.desmos.com/join/nxhjzp?lang=pt-BR
2. https://student.desmos.com/join/mgpkhm?lang=pt-BR
3. https://student.desmos.com/join/7h49bp?lang=pt-BR
4. https://student.desmos.com/join/wvffbn?lang=pt-BR

Para isso, os alunos serão separados em duplas e, no máximo, em trios e designados cada um a seus computadores, que estarão previamente abertos nas páginas das atividades propostas.

Atividade 1

A Atividade 1 irá servir como introdução a uma discussão sobre algumas situações em que sistemas lineares podem servir como ferramentas de análise do mundo real. Como será apenas uma contextualização de sistemas em um cenário fictício, a atividade não deve tomar mais do que 15 minutos.

Atividade 2

A Atividade 2 é introdutória a de sistemas, o esperado é que, com a discussão em turma sobre cada um dos pontos, dure em torno de 25 minutos.
Mesmo que as noções de sistemas foram apresentadas no encontro anterior, utilizaremos desta atividade para explorar, especialmente, soluções gráficas de sistemas 2x2.

Nela, todos os sistemas utilizados são da forma "a soma de dois números é *p* e sua diferença é *q*, quais são tais números?", contudo, servirão como exemplos de fixação dos métodos trabalhados na aula anterior. Aqui, os professores devem auxiliar na noção intuitiva e, principalmente, na posição que as respostas fornecidas pelos alunos devem tomar no gráfico – todas devem estar em uma reta.

Dessa forma, os "*slides*" mais importantes são os 5 e 10, nos quais o professor deve pedir que a turma permaneça neles de modo a realizar uma discussão geral sobre a "estrutura" formada pelos pontos indicados como solução. O importante é notar que todos formam uma reta.

Atividade 3

A Atividade 3 torna mais evidente "O que é a solução de um sistema de equações" na interpretação gráfica, bem como os diferentes tipos de sistemas e suas soluções podem ser representados no plano cartesiano. O foco desta atividade é, dada a descrição de um sistema, que os alunos consigam transcrever as equações lineares matematicamente e montar o sistema graficamente.

O professor deve pedir para que a turma permaneça nos "*slides*" 4, 9 e 10 (quando os alcançarem) para uma discussão conjunta sobre o que eles representam. Neles, está presente a definição de solução de sistema linear graficamente como o ponto de interseção de duas retas e um exemplo de um sistema impossível, o qual devemos introduzir aqui. Esperamos que os alunos realizem essa atividade em 30 minutos.

Definição. Sistema linear possível (IEZZI, 2022).
Dizemos que um sistema linear é *possível* se ele admitir pelo menos uma solução. Ela será *possível e determinado,* se existir exatamente uma solução, e *possível e indeterminado* se existirem mais do que uma solução. Graficamente, um sistema *possível e determinado* é um sistema em que as duas retas se encontram em exatamente um único ponto. Ele será *possível e indeterminado* se as duas retas forem, na verdade, a mesma.

Definição. Sistema linear impossível (IEZZI, 2022).
Dizemos que um sistema linear é im*possível* se ele não admitir nenhuma solução. Graficamente é o caso quando as duas retas nunca se cruzam, ou seja, são paralelas.

Atividade 4

Finalmente, a Atividade 4 busca reforçar maneiras de reforçar a construção gráfica de um sistema linear dada suas equações e propõem exercícios de reforço nos métodos de encontrar as soluções destes sistemas, com o auxílio gráfico.

Como as atividades aqui propostas servirão de exercícios de fixação na solução de sistemas 2x2, os professores devem deixar com que os alunos avancem em seu próprio ritmo, auxiliando as duplas quando forem requisitados.

A princípio, os maiores desafios serão os exercícios 6, 7 e 9. Neles os alunos deverão solucionar algebricamente grupos de sistemas lineares antes de marcar os pontos no gráfico. Esperamos que esta atividade dure em torno de 30 minutos.

Para maiores informações sobre cada uma das atividades, bem como uma análise de cada um dos "slides" presentes e recomendações para o professor em cada uma, ver Anexos 1 à 4 na pasta do drive, que é https://drive.google.com/drive/folders/1UOa8nMANjqJy_Vgky5WhTdr0JZx3i8LM?usp=drive_link .

Assim, após o intervalo, mudaremos a metodologia utilizada. Voltaremos à sala de aula, onde aplicaremos uma lista de problemas envolvendo sistemas lineares em diversas situações.

A lista segue no Anexo 5.

Referências:

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar volume 4 :** sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 8. ed. São Paulo: Editora Atual, 2022. v. 4

SCHOENFELD, A. **Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?**. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), Investigar para aprender matemática (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT. 1996.

DANTE, L. R. **Matemática - contexto e aplicações**. São Paulo: Editora Ática, 2021. v. 2.

PONTE, J. P. DA. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 4. ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica Editora, 2021.

PONTES, E. A. S. Noção intuitiva no ato de ensinar e aprender matemática por meio de uma atividade de ensino de sistemas lineares com coeficientes positivos. **Revista Baiana de Educação Matemática**, v. 2, n. 01, p. e202106, 26 maio de 2021.

DOS SANTOS, M. G. M.; SOUSA, R. T. DE; ALVES, F. R. V. Situações Didáticas Profissionais: concepções e obstáculos no ensino de sistemas lineares e o uso do GeoGebra. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 14, n. 1, p. 1–22, 15 abr. 2024.

HENRIQUES, A.; ALMOULOUD, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 22, n. 2, p. 465–487, jun. 2016.

PANTOJA, L. F. L.; CAMPOS, N. F. DA S. C.; SALCEDOS, R. R. C. A Teoria dos registros de representação semióticas e o estudo de sistemas de equações algébricas lineares. **VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática**. 2013.

Relatório

Para a aula do dia 27 de setembro do PROMAT, planejamos realizar uma atividade mediada pelo uso de tecnologias para que os alunos explorassem a representação gráfica de sistemas lineares. Anteriormente ao início da aula, comunicamos aos alunos que a aula seria realizada no laboratório de informática e que, portanto, aqueles que soubessem onde este se situa na unioeste poderiam ir direto para lá; àqueles que não conheciam o caminho, pedimos que se dirigissem à sala para que nós os guiar assim que todos chegassem. Dessa forma, o professor Leonardo e a professora Luiza se mantiveram no laboratório para auxiliar os alunos que chegassem com o *login* nos computadores; o professor Ruan esperou os alunos na sala de aula normal até às 08:15 da manhã e conduziu o grupo que com ele estava até o local onde a aula ocorreria.

Ao chegar no laboratório, notamos que nossa turma possuía 10 alunos. Um número abaixo do esperado, mas que nos serviu bem – pois o laboratório possuía apenas 10 computadores instalados e prontos para o uso perto do quadro. Após a chegada dos alunos restantes, nós nos encarregamos de auxiliar os alunos com o uso dos computadores, ajudando os alunos a realizarem seus *logins* no sistema da Unioeste e substituindo mouse, teclados e cabos de ethernet quando os mesmos estavam defeituosos. Aproveitamos, também, deste momento para auxiliar os alunos que já haviam realizado seus *logins* no computador com as questões passadas como tarefa na aula anterior.

Tal processo tomou em torno de 30 minutos, algo que não havíamos antecipado em nosso preparo da aula e que, notamos, era inevitável para qualquer aula em que os alunos seriam levados para um ambiente diferente.

Os alunos realizaram o acesso à plataforma *Desmos* por volta das 08:40 da manhã, percebemos que seria necessário alterar nosso planejamento para contar com este atraso. Assim, as instruções referentes à atividade inicial foram dadas. Tal atividade requer uma simples observação das velocidades relativas de dois carros, pedindo o ponto em que ambos se encontrariam. Enquanto os alunos realizavam as atividades, nós acompanhamos seu progresso a partir da tela do professor oferecida pela plataforma, bem como buscamos questionar os alunos sobre a etapa em que se encontravam e as respostas que ofereceram nas questões anteriores. Esta atividade se estendeu pelo tempo previsto de 15 minutos e serviu como uma introdução aos alunos de como essa primeira metade da aula iria decorrer e, principalmente, de como utilizar a plataforma *Desmos*. Após os alunos terminarem, retomamos o conceito de sistemas que trabalhamos na aula anterior e comentamos como a atividade, resolvida de maneira intuitiva pela maioria dos alunos, poderia ter sido solucionada através de um sistema de equações.

Com isso, disponibilizamos para os alunos o acesso a segunda atividade, que utilizaria dos conceitos trabalhados por eles de maneira mais aberta e iria introduzi-los à representação gráfica de sistemas lineares e como encontrar sua solução a partir de tal representação.

No entanto, nossa percepção sobre o andamento da aula e a interação com os alunos foi afetada pela inexperiência com o formato da aula. O silêncio na sala, devido à atividade individual e ao feedback automático da plataforma, contrastava com a dinâmica usual das aulas, caracterizadas pela resolução de problemas em grupo e diálogo. Interpretamos erroneamente o silêncio como falta de aprendizado e tentamos preenchê-lo com explicações e perguntas, o que acabou atrapalhando os alunos. Essa experiência evidenciou nossa falta de familiaridade com diferentes modelos de aula, mas também se tornou uma oportunidade de aprendizado sobre o papel do professor em diferentes cenários.

Contudo, mesmo com nossas intrusões na linha de raciocínio dos alunos, esta segunda atividade seguiu de maneira satisfatória até o final. A partir dos exemplos, por mais que simples, a solução gráfica de sistemas lineares foi muito bem representada. O fato de que as respostas dos colegas para pontos que satisfazem certa condição (como dois números cuja soma é 8) eram visíveis para todos, juntamente com a diversidade de respostas apresentadas, ilustrou de forma clara para os alunos o surgimento de uma reta. Ao adicionar uma nova condição, a interseção dessas retas foi compreendida como a solução do sistema como um todo.

Contudo, novamente mostramos certo descuido com o tempo planejado para uma atividade: esperamos, ao finalizar a segunda atividade, ainda ter tempo para realizarmos a terceira preparada; no entanto, não consideramos em nosso planejamento o horário de intervalo dos alunos, que ocorre entre às 09:40 e 10 horas. Assim, após os alunos finalizarem a segunda atividade, os liberamos para o intervalo e conversamos entre nós sobre nossas expectativas e resultados que observamos com a atividade no laboratório.

Após o intervalo, retomamos nossas atividades na sala de aula usual. Pedimos que os alunos se dispusessem da maneira que quisessem, seja sozinhos, duplas ou grupos gerais, e explicamos que este segundo momento seria dedicado à fixação dos conceitos trabalhados sobre sistemas lineares. Assim, enquanto as folhas de exercícios eram entregues, o professor retomou brevemente os conceitos trabalhados, a solução gráfica vista naquela aula e, também, como identificar e classificar um sistema linear (como sistema possível e determinado (SPD), sistema possível e indeterminado (SPI) e sistema impossível (SI)) a partir da representação gráfica, algébrica e matricial, comentando que esses métodos seriam necessários em alguns dos exercícios propostos.

Dessa forma, os professores ficaram à disposição dos alunos que, então, começaram a solucionar a lista proposta. Aproveitamos este momento, também, para perguntar a opinião dos alunos sobre o momento em laboratório e entendemos o proveito que eles retiraram da atividade, o qual foi mais positivo do que nós havíamos concluído ao final da primeira parte.

Quanto às soluções, notamos que a maior dificuldade apresentada pelos alunos está na interpretação da situação apresentada no problema e em como "montar" o sistema em notação matemática. Percebemos, também, certo esforço na solução das equações algébricas presentes: de fato, os alunos pareceram ter compreendido o "caminho" para encontrar a solução de um sistema por meio de sua abordagem favorita, contudo, vimos que a maior parte dos erros cometidos está na manipulação algébrica das equações – especialmente quando relacionado ao "isolar" as incógnitas de um lado e operações entre frações. Um obstáculo que observamos os alunos passarem é no entendimento de quanto "pode passar o denominador de uma fração para o outro lado". Por exemplo, em um caso de $3 + \frac{x}{5} = 0$, observamos que os alunos "passavam o 5 para o outro lado" de maneira direta, antes de realizar o mmc com o 3, ou tratá-lo de alguma outra forma.

Assim, grande parte de nosso auxílio se concentrou em ajudar os alunos com essas questões ou incentivando-os a fazerem os questionamentos certos para conseguirem montar os sistemas. O progresso dos alunos foi mais lento que o esperado, mas os aconselhamos a levarem a lista de exercícios para casa e tentarem durante a semana, em que nós estaríamos à disposição para auxiliá-los.

Em suma, apesar de enfrentar imprevistos e falhas no planejamento, notamos ao final da aula que a compressão dos alunos sobre os conceitos trabalhados estava aguçada e, principalmente, que eles mesmo sentiram que tiraram proveito das atividades propostas. Notamos nossa falta de conhecimento sobre a atuação do professor com o uso de diferentes tendências de educação e como podemos estar melhorando neste ponto, bem como nossa necessidade de experimentarmos com mais abordagens no decorrer do PROMAT.

Materiais utilizados

- **Lista de Exercícios**

1. O Rockão na praça tem 20.000 lugares — 8.000 numerados e 12.000 gerais. Os lugares numerados custam 10 reais cada um e os outros 5 reais cada um. A mais nova sensação, o grupo de rock Beijinho, está fazendo uma apresentação lá. Se foram arrecadados 130.000 reais pela venda de 18.500 ingressos, quantos lugares numerados foram vendidos?
2. (UFMS/2018) O sistema a seguir foi construído com base nas vendas mensais de três vendedores (A, B e C), em que os valores de x, y e z são as quantidades vendidas por cada vendedor.

$$\begin{cases} A: x+2y+3z=14 \\ B: 2x-3y+2z=2 \\ C: -2x+y-5z=-15 \end{cases}$$

Sendo assim, de quanto foi o produto das vendas dos três vendedores?

3. (UERJ/2020) Os números inteiros x e y satisfazem às seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x+\frac{3}{5}y=37 \\ x-y=30 \end{cases}$$

Qual é o valor de x + y?

4. ESPM RJ/2018) O sistema

$$\begin{cases} x+ky=3 \\ kx+4y=6 \end{cases}$$

onde k ∈ IR, é classificado como:

a) possível e indeterminado, se k = –2.
b) possível e indeterminado, se k ≠ 2.
c) possível e determinado, se k = 2.
d) impossível, se k = –2.
e) impossível, se k = 2.

5. (UEL) O sistema abaixo, de incógnitas x e y, é:

$$\begin{cases} 6x+ky=9 \\ 2\times -7y=1 \end{cases}$$

a) impossível, para todo k real diferente de -21;
b) possível e indeterminado, para todo k real diferente de -63;
c) possível e determinado, para todo k real diferente de -21;
d) possível e indeterminado, para todo k real diferente de -3;
e) possível e determinado, para todo k real diferente de -1 e -63.

6. (Unesp) Uma coleção de artrópodes é formada por 36 exemplares, todos eles íntegros e que somam, no total da coleção, 113 pares de patas articuladas. Na coleção não há exemplares das classes às quais pertencem o caranguejo, a centopeia e o piolho-de-cobra.

a) Arachnida, com maior número de exemplares da classe Arachnida.

b) Diplopoda, com maior número de exemplares da classe Diplopoda.

c) Chilopoda, com igual número de exemplares de cada uma dessas classes.

d) Arachnida, com maior número de exemplares da classe Insecta.

e) Chilopoda, com maior número de exemplares da classe Chilopoda.

7. (UECE) Se x, y e z constitui a solução do sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = -2 \\ x + 4y + 5z = -4 \end{cases}$$

então o produto x. y. z é igual a

a-4

b)-8

c)-2

d) -6

8. (Ufrgs) Inovando na forma de atender aos clientes, um restaurante serve alimentos utilizando pratos de três cores diferentes: verde, amarelo e branco. Os pratos da mesma cor custam o mesmo valor. Na mesa A, foram consumidos os alimentos de 3 pratos verdes, de 2 amarelos e de 4 brancos, totalizando um gasto de R$ 88,00. Na mesa B, foram consumidos os alimentos de 2 pratos verdes e de 5 brancos, totalizando um gasto de R$ 64,00. Na mesa C, foram consumidos os alimentos de 4 pratos verdes e de 1 amarelo, totalizando um gasto de R$ 58,00.

Comparando o valor do prato branco com o valor dos outros pratos, verifica-se que esse valor é

a) 80% do valor do prato amarelo.

b) 75% do valor do prato amarelo.

c) 50% do valor do prato verde.

d) maior que o valor do prato verde.

e) a terça parte do valor da soma dos valores dos outros pratos.

9. (Ufsm) Num determinado mês, em uma unidade de saúde, foram realizadas 58 hospitalizações para tratar pacientes com as doenças A, B e C. O custo total em medicamentos para esses pacientes foi de R$39.200,00.

   Sabe-se que, em média, o custo por paciente em medicamentos para a doença A é R$450,00, para a doença B é R$800,00 e para a doença C é R$1.250,00. Observa-se também que o número de pacientes com a doença A é o triplo do número de pacientes com a doença C. Se a, b e c representam, respectivamente, o número de pacientes com as doenças A, B e C, então qual é o valor de a - b – c?

Apostila utilizada: Anexo 5

ENCONTRO 6 – 05/10/2024

Plano de aula

Público-Alvo: Alunos do segundo e terceiro ano do ensino médio

Tempo de execução: 4 horas

Conteúdo: Geometria Analítica

Objetivo Geral: Compreender noções de geometria analítica no plano cartesiano e as relações entre os objetos matemáticos de ponto, reta e circunferência.

Objetivos Específicos:

- Reconhecer a posição de um ponto no plano cartesiano;
- Calcular a distância entre pontos e ponto e reta;
- Identificar a equação da reta bem como seus elementos;
- Identificar a equação da circunferência bem como seus elementos;

Recursos Didáticos: Quadro, giz, tabuleiro do jogo de batalha naval tradicional, material de apoio: apostila de conteúdos e lista de problemas.

Metodologia: O uso de jogos e atividades lúdicas no ensino de matemática, em especial no campo da Geometria Analítica, se apoia em abordagens pedagógicas que favorecem a aprendizagem ativa e significativa. A proposta de utilizar o jogo de Batalha Naval visa integrar conceitos abstratos de coordenadas e geometria com uma dinâmica prática e motivadora, que envolve os alunos de forma interativa.

Encaminhamento metodológico:

Conforme os alunos forem chegando, organizaremos a turma em duplas para a atividade, com a qual iniciaremos a aula, batalha naval.

a. Nesse ponto buscar a identificação de pontos no tabuleiro por meio de coordenadas

2. Adicionar gradativamente os novos tipos de armas: bomba nuclear e raio laser
3. Sistematizar e formalizar os conceitos trabalhados na forma linear do jogo
4. No final da aula, trocar para o tabuleiro circular e fazer a mesma introdução gradativa de mecânicas
5. Sistematizar e formalizar os conceitos trabalhados na forma circular do jogo

6. Lista de problemas no final caso terminem mais rapidamente

Iniciaremos a aula separando a turma em grupos e explicando as regras do jogo de Batalha Naval.

O jogo:

Ver peças e tabuleiro no *Anexo I*.

Embarcações disponíveis:

- 5 hidroaviões
- 4 submarinos
- 3 cruzadores
- 2 encouraçados
- 1 porta-aviões

Armas disponíveis:

- Tiros de canhão

Preparação do jogo:

1. Cada jogador distribui suas embarcações pelo tabuleiro. Isso é feito marcando-se no reticulado intitulado “Seu jogo” os quadradinhos referentes às suas embarcações.
2. Não é permitido que 2 embarcações se toquem.
3. O jogador não deve revelar ao oponente as localizações de suas embarcações.

Jogando:

Cada jogador, na sua vez de jogar, seguirá o seguinte procedimento:

1. Disparará 3 tiros, indicando as coordenadas do alvo através do número da linha e da letra da coluna que define a posição. Para que o jogador tenha o controle dos tiros disparados, deverá marcar cada um deles no reticulado intitulado "Seu jogo".

2. Após cada um dos tiros, o oponente avisará se acertou e, nesse caso, qual a embarcação foi atingida. Se ela for afundada, esse fato também deverá ser informado.
3. A cada tiro acertado em um alvo, o oponente deverá marcar em seu tabuleiro para que possa informar quando a embarcação for afundada.
4. Uma embarcação é afundada quando todas as casas que formam essa arma forem atingidas.
5. Após os 3 tiros e as respostas do oponente, a vez para para o outro jogador. O jogo termina quando um dos jogadores afunda todas as embarcações do seu oponente.

Cada dupla receberá uma cópia das regras acima e irá jogar segundo elas por 20 minutos. Durante esse período, os professores devem andar pela sala e interagir com as duplas, pedindo sobre os pontos no tabuleiro em que as peças foram colocadas.

O importante neste momento é que os alunos relacionem a "posição" das peças nas interseções de duas linhas como o par de informações – e que comecem a interpretar isso como um "ponto" no plano. Por esse motivo, os questionamentos dos professores devem ser voltados a levar a esta linha de raciocínio.

Após 20 minutos, os professores irão introduzir a seguinte arma aos alunos:

- *Bomba nuclear*: O jogador atuante seleciona um ponto no tabuleiro, a bomba nuclear destroi todas as embarcações em uma distância de 2 centímetros. Cada jogador poderá utilizar uma bomba nuclear durante o jogo e, ao fazer, deve entregar seu *token* de bomba nuclear.

Após a apresentação desta nova arma, os alunos voltaram a jogar. Nesse momento, o foco dos professores deve ser em questionamentos que levem os alunos a descobrir *quais* pontos estão a uma distância de 2cm. Ou seja, serão questionamentos que devem buscar que os alunos calculem a distância entre dois pontos.

Outro ponto que deve ser comentado – mas não enfocado – é o *formato* gerado pela bomba, para começar a introduzir a noção de circunferência que será elaborada mais adiante.

O jogo com a bomba nuclear durará por 20 minutos, em que os professores devem introduzir, novamente, mais uma arma.

- *Raio laser:* Iniciando na origem, ponto (0,0), um raio é disparado destruindo tudo em seu caminho. Assim, o jogador deve especificar algum outro ponto pelo qual o raio irá passar. Cada jogador poderá utilizar dois raios lasers durante o jogo e, ao fazer, deve entregar um de seus *tokens* de raio laser.

Aqui, os professores devem fortemente incentivar os alunos sendo atacados a buscar maneiras de saber, com precisão, quais pontos serão afetados pelo raio laser e, para isso, devem buscar maneiras de desenvolver a equação da reta. Assim, os questionamentos devem ser direcionados ao desenvolvimento disto.

O jogo com essa arma deve durar por mais 25 minutos. Após isso, os alunos serão introduzidos à última arma:

- *Bombardeiro silencioso B-2:* é um bombardeiro estratégico pesado americano, com tecnologia stealth de baixa detecção, projetado para penetrar defesas antiaéreas (WIKIPEDIA, 2024). Ele descreve uma reta que passa por qualquer ponto, mas possui inclinação fixa de 2. O bombardeiro lança um feixe de bombas em seu caminho que destroi todas as embarcações na reta traçada *e* em até 1 centímetro de distância.

Com esta arma, é esperado que os alunos entendam como definir uma reta dados 2 pontos e, principalmente, desenvolvem noções de como calcular a distância de um ponto à uma reta. Assim, as perguntas que os questionamentos que os professores devem realizar neste momento devem levar os alunos neste caminho.

Os jogos, então, devem durar até o intervalo.

Voltando do intervalo, os professores irão formalizar os conceitos trabalhados com as seguintes definições ver *Anexo II*, que serão passadas em slides e em uma apostila de conteúdos entregue a cada aluno. Neste momento, os professores devem formalizar os alunos e sanar as dúvidas que ficaram sobre os procedimentos técnicos utilizados durante a atividade exploratória.

Referências:

SCHOENFELD, A. **Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?**. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), Investigar para aprender matemática (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT. 1996.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática e a Perspectiva Sócio-crítica. In: II SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, II, 2003, Santos. **Livro de Resumos.** Santos: SBEM, 2003. p. 135-144.

PONTE, J. P. DA. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 4. ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica Editora, 2021.

Northrop B-2 Spirit. In: **WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre.** Wikimedia, 2024. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Northrop_B-2_Spirit>. Acesso em: 10 de setembro de 2024.

SOARES, Vanessa Ribeira. **Batalha naval e suas aplicações**. 2016. 83 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2016.

Relatório

A aula do dia cinco de outubro de 2025 teve a presença de apenas 11 alunos, a aula iniciou meia hora depois das 8 horas, pois a maior parte dos alunos chegou atrasada. A aula foi dividida em duas partes, uma antes do intervalo no qual iríamos descrever, definir e exemplificar conceitos da geometria analítica, e na segunda parte que eles iriam utilizar estes conceitos para o jogo de batalha naval que havíamos planejado. A aula iniciou com o professor Ruan dando uma explicação sobre a origem do conceito do plano cartesiano, dando uma conexão à René Descartes, ao qual os alunos riram e falaram como matemáticos são "malucos" ao ponto de uma mosca no teto levá-los à questionamentos matemáticos.

Depois disso, começamos a explicação dos conceitos da geometria analítica com a professora Luiza definindo o conceito de ponto, dando alguns exemplos utilizando o ponto cartesiano. O próximo conceito trabalhado foi a distância, o qual o professor Ruan exemplificou primeiro no contexto horizontal, depois no vertical, levando à forma de calcular a distância geral com base no teorema de Pitágoras, o qual os alunos comentaram que entenderam bem e acharam os exemplos bons.

Depois disso o professor Leonardo apresentou o conceito de retas, definindo-a apenas no plano cartesiano inicialmente, depois pedindo que os alunos se lembrem das aulas de sistemas lineares, apontando como equações podem ser representadas como retas, e que o contrário também vale. Pediu que os alunos também lembrassem das posições relativas entre as retas, conceito que já foi trabalhado na aula de sistemas lineares, porém dessa vez foi explicado como o coeficiente angular pode ser utilizado para determinar se duas retas são paralelas, concorrentes e perpendiculares.

Depois disso, o professor Ruan explicou o conceito da distância do ponto até a reta, utilizando o conceito de perpendicularidade para construir a reta de menor distância entre o ponto e a reta desejada, encontrando então duas retas, com duas equações. Os alunos conseguiram entender esse procedimento para o cálculo da distância, entretanto ao apresentar a fórmula, notamos que os slides estavam com problema e a fórmula estava incorreta, o professor Ruan derivou a fórmula correta e comparou com os resultados que havia encontrado na internet, vendo que o problema estava na forma com a qual foi representada a função da reta não como y em função de x mas como uma equação igualando a zero.

Depois disso, a professora Luiza explicou a definição do círculo, e como isso se conecta à definição de distância, sendo o círculo apenas a aplicação da fórmula da distância até o centro com pontos arbitrários, os alunos pareceram entender isto.

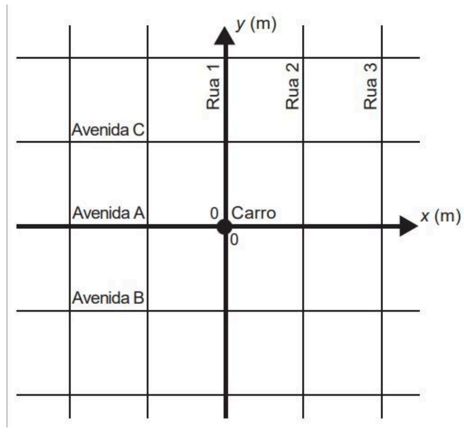
Depois de todos estes conceitos serem explicados, houve o intervalo, ao retornar todas as mesas estavam organizadas com uma cópia do batalha naval impressa em 3d em cada. Com isso foram divididos em 6 grupos, com um professor sendo o parceiro de jogo de um dos alunos, que foi revezando entre os professores Ruan e Leonardo. Explicamos as regras, e como esse jogo de batalha naval seria diferente, inicialmente houve uma resistência dos alunos a utilizarem os conceitos explicados em aula, mas quanto mais jogavam mais perceberam que utilizar os conceitos dava uma vantagem tática. Depois de algumas rodadas do jogo, pedimos que os alunos conversem com a sala sobre as técnicas utilizadas durante os jogos, e entregamos a lista de exercícios.

Materiais utilizados

- **Lista de exercícios**:

1. (Enem 2022 - Adaptada) Uma moça estacionou seu carro na interseção da Rua 1 com a Avenida A. Ela está hospedada em um hotel na Rua 3, posicionado a exatos 40 metros de distância da Avenida A, contados a partir da Avenida A em direção à Avenida B.

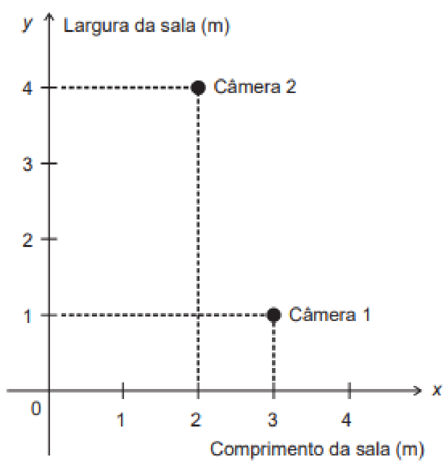
No mapa está representado um plano cartesiano cujo eixo das abscissas coincide com a Avenida A e o das ordenadas, com a Rua 1, sendo a origem (0, 0) o local onde se encontra estacionado o veículo. Os quarteirões formados pelos cruzamentos dessas vias formam quadrados de lados medindo 100 m.



Qual a coordenada do ponto do Hotel?

2. (Enem 2019 - Adaptada) Uma empresa, investindo na segurança, contrata uma firma para instalar mais uma câmera de segurança no teto de uma sala. Para iniciar o serviço, o representante da empresa informa ao instalador que nessa sala já estão instaladas duas câmeras e, a terceira, deverá ser colocada de maneira a ficar equidistante destas. Além disso, ele apresenta outras duas informações:

   (i) um esboço em um sistema de coordenadas cartesianas, do teto da sala, onde estão inseridas as posições das câmeras 1 e 2, conforme a figura.

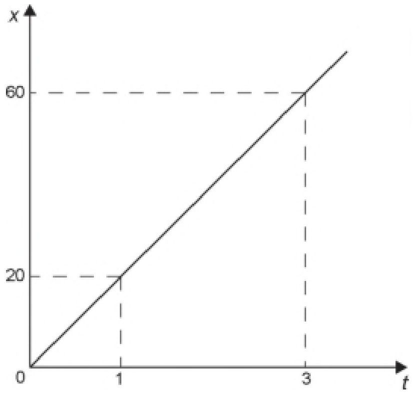


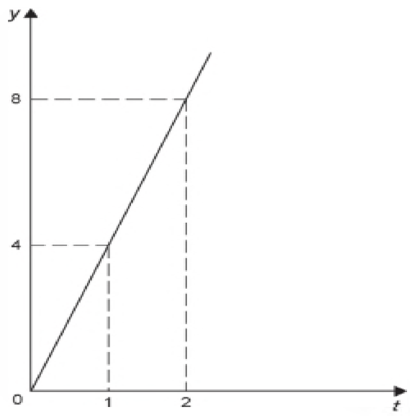
   (ii) cinco relações entre as coordenadas (x ; y) da posição onde a câmera 3 deverá ser instalada.

R_1: $y = x$; R_2: $y = -3x$; R_3: $y = -3x + 10$; R_4: $y = \frac{x+5}{3}$; R_5: $y = \frac{10x+3}{30}$

O instalador, após analisar as informações e as cinco relações, faz a opção correta dentre as relações apresentadas para instalar a terceira câmera. Qual relação ele escolheu?

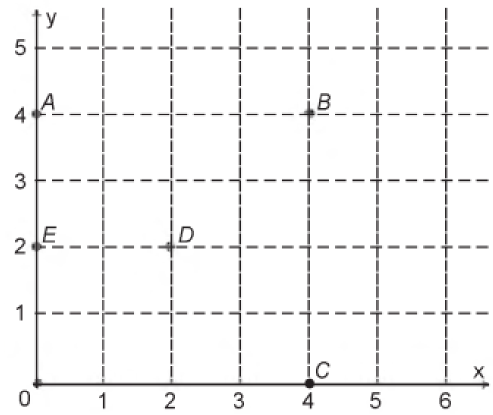
3. (Enem 2018 - Adaptada) A quantidade *x* de peças, em milhar, produzidas e o faturamento *y*, em milhar de real, de uma empresa estão representados nos gráficos, ambos em função do número t de horas trabalhadas por seus funcionários.





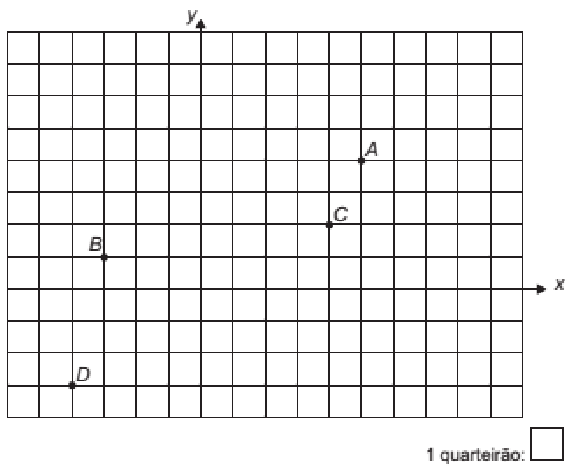
Qual o número de peças que devem ser produzidas para se obter um faturamento de R$ 10 000,00?

4. (Enem 2018 - Adaptada) Um jogo pedagógico utiliza-se de uma interface algébrico-geométrica do seguinte modo: os alunos devem eliminar os pontos do plano cartesiano dando "tiros", seguindo trajetórias que devem passar pelos pontos escolhidos. Para dar os tiros, o aluno deve escrever em uma janela do programa a equação cartesiana de uma reta ou de uma circunferência que passa pelos pontos e pela origem do sistema de coordenadas. Se o tiro for dado por meio da equação da circunferência, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 2 pontos. Se o tiro for dado por meio da equação de uma reta, cada ponto diferente da origem que for atingido vale 1 ponto. Em uma situação de jogo, ainda restam os seguintes pontos para serem eliminados: *A*(0 ; 4), *B*(4 ; 4), *C*(4 ; 0), *D*(2 ; 2) e *E*(0 ; 2).



Passando pelo ponto *A*, determine uma equação que dê pelo menos 6 pontos.

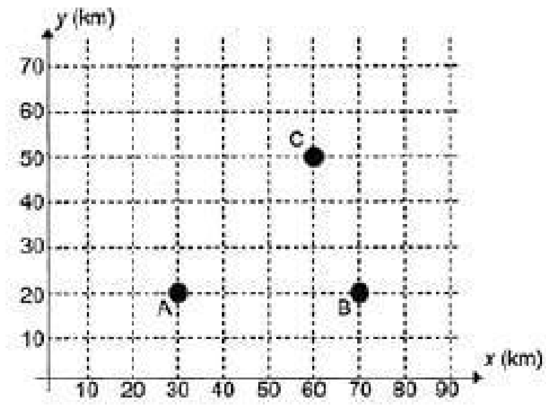
5. (Enem 2015 - Adaptada) Considere que os quarteirões de um bairro tenham sido desenhados no sistema cartesiano, sendo a origem o cruzamento das duas ruas mais movimentadas desse bairro. Nesse desenho, as ruas têm suas larguras desconsideradas e todos os quarteirões são quadrados de mesma área e a medida de seu lado é a unidade do sistema. A seguir há uma representação dessa situação, em que os pontos *A, B, C* e *D* representam estabelecimentos comerciais desse bairro.



Suponha que uma rádio comunitária, de fraco sinal, garante área de cobertura para todo estabelecimento que se encontre num ponto cujas coordenadas Estão na parte interior do círculo definido por: $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 31 = 0$

A fim de avaliar a qualidade do sinal, e proporcionar uma futura melhora, a assistência técnica da rádio realizou uma inspeção para saber quais estabelecimentos estavam dentro da área de cobertura, pois estes conseguem ouvir a rádio enquanto os outros não. Quais estabelecimentos terão acesso à rádio?

6. (Enem 2013 - Adaptada) Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.
Quais as coordenadas do local adequado para a construção dessa torre?

7. (Enem 2013 - Adaptada) Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos, I, II, III, IV e V, como se segue:

I — é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$;

II — é a parábola de equação $y = - x^2 - 1$, com x variando de -1 a 1;

III — é o quadrado formado pelos vértices (-2,1), (-1,1), (-1,2) e (-2, 2);

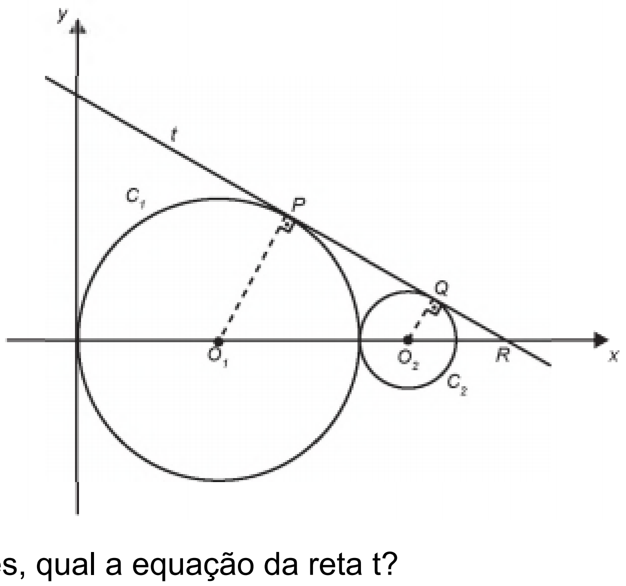
IV — é o quadrado formado pelos vértices (1, 1), (2, 1), (2, 2) e (1, 2);

V — é o ponto (0, 0).

A seguir, o professor representa corretamente os cinco conjuntos sobre uma mesma malha quadriculada, composta de quadrados com lados medindo uma unidade de comprimento, cada, obtendo uma figura. Qual figuras foi desenhada pelo professor?

8. Para apagar os focos A e B de um incêndio, que estavam a uma distância de 30 m um do outro, os bombeiros de um quartel decidiram se posicionar de modo que a distância de um bombeiro ao foco A, de temperatura mais elevada, fosse sempre o dobro da distância desse bombeiro ao foco B, de temperatura menos elevada. Nestas condições qual a maior distância, em metro, que dois bombeiros poderiam ter entre eles?

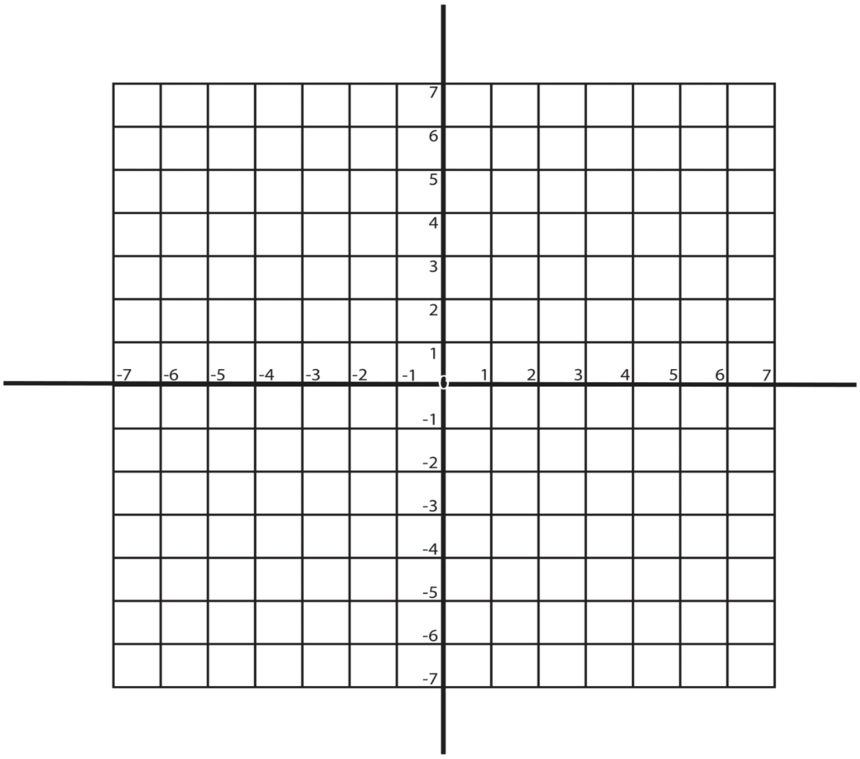
9. Na figura estão representadas, em um plano cartesiano, duas circunferências: C_1 (de raio 3 e centro O_1) e C_2 (de raio 1 e centro O_2), tangentes entre si, e uma reta t tangente às duas circunferências nos pontos P e Q.



Nessas condições, qual a equação da reta t?

- **Apostila utilizada:** Anexo 6

Figura 3: Tabuleiro utilizado



Fonte: Elaborado pelos autores

Figura 4: Peças utilizadas, impressas em 3d

Fonte: Elaborado pelos autores, modelos disponíveis em https://drive.google.com/drive/folders/1UE5mu2wm2bZz4bGuBwnRCq42Nelbx8v7?usp=sharing

ENCONTRO 7 – 26/10/2024

Plano de aula

Público-Alvo: Alunos do segundo e terceiro ano do Ensino Médio

Tempo de execução: 4 horas

Conteúdo: Trigonometria no triângulo retângulo

Objetivo Geral: Desenvolver o entendimento das relações trigonométricas por meio da investigação colaborativa e da resolução de problemas progressivos, consolidando conceitos como ângulos notáveis e as leis do seno e cosseno.

Objetivos Específicos:

- Identificar propriedades de triângulos retângulos e compreender a relação entre seus lados e ângulos.
- Explorar a constância das razões trigonométricas (seno, cosseno e tangente) para triângulos com ângulos iguais, independentemente das medidas dos lados.
- Construir uma tabela de ângulos notáveis, registrando suas respectivas razões trigonométricas.
- Formalizar as leis do seno e do cosseno, compreendendo suas aplicações em triângulos genéricos.
- Incentivar a investigação e o questionamento matemático, promovendo reflexões sobre as relações entre ângulos e razões trigonométricas.
- Aplicar as relações trigonométricas em exercícios práticos para fixação do conteúdo.

Recursos Didáticos: Quadro, giz, triângulos recortados em EVA, réguas, transferidores.

Metodologia:

A metodologia da aula será pela utilização de problemas progressivos para que o aluno construa o conhecimento. Nossa metodologia para os problemas progressivos se baseia na visão de Saddo, na qual a reformulação da hipótese faz com que o aluno veja diferentemente o problema.

Encaminhamento metodológico:

Iniciaremos questionando os alunos alunos sobre seus conhecimentos referentes à triângulos retângulos, como uma maneira de introduzir nosso objeto de estudo nesta aula.

O que são triângulos retângulos? Existe alguma relação entre os lados do triângulo?

Dando sequência, iniciaremos uma atividade investigativa para os alunos observarem como as relações trigonométricas não dependem do tamanhos dos lados de um triângulo mas, sim, dos ângulos formados entre eles.

Dessa maneira, iremos pedir para que os alunos se organizem em grupos e, então, entregaremos aos grupos conjuntos de 9 triângulos separados em três grupos, de acordo com seus ângulos internos:

1. Triângulos 90, 60, 30
2. Triângulos 90, 45, 45
3. Triângulos 90, 75, 15

Cada grupo contará com 3 triângulos diferentes, cada um com os mesmos ângulos mas medidas de lados diferentes. Pediremos que eles meçam os lados com réguas e os ângulos internos com transferidores.

O objetivo da atividade é que os alunos calculem as razões entre os lados dos triângulos e busquem estabelecer relações, registrando seus achados em forma de uma tabela. O esperado é que eles encontrem que as razões permaneçam as mesmas entre os triângulos de dado grupo, independente da medida de seus lados.

No decorrer desta atividade, devemos realizar uma série de questionamentos para os grupos, visando aprofundar seus conhecimentos e auxiliar no processo investigativo. Aqui estão alguns exemplos de questionamentos que podemos fazer:

1. Existe alguma relação entre os lados e os ângulos de um triângulo?
2. A razão entre os lados de um triângulo sempre varia, ou ela depende de alguma coisa? Do que ela depende?
3. Como é essa relação entre as razões? Se eu dobro um ângulo, eu dobro a razão? Ela é linear?
4. Conseguem perceber algumas relações *entre* essas razões?

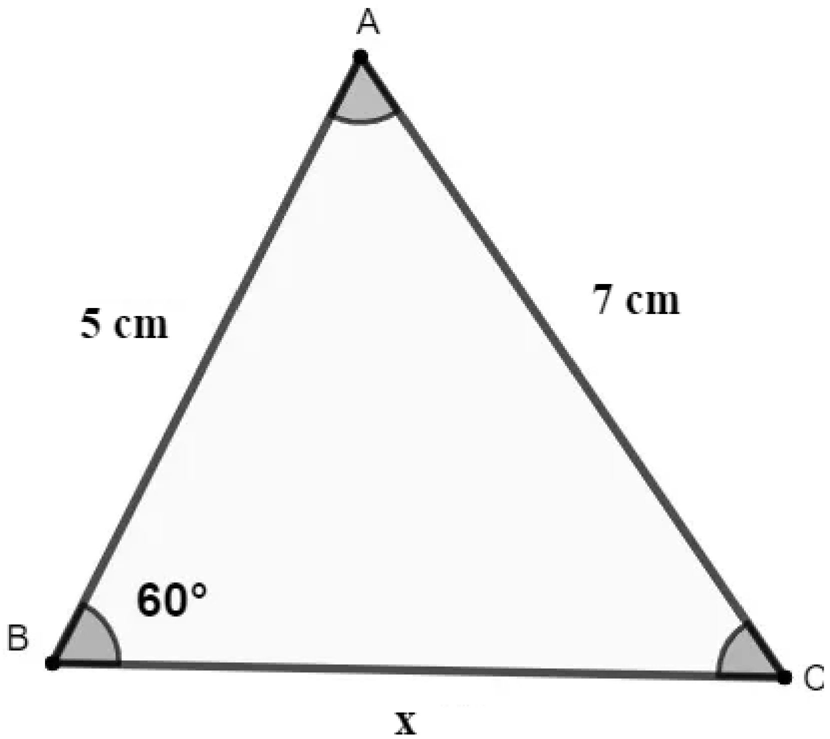
5. Existe alguma relação entre essas razões para ângulos complementares? O que pode ser percebido?
6. Existe algum valor máximo que essa razão pode tomar? Qual? E para qual ângulo isso ocorre?

Esperamos que essa investigação inicial prossiga até o intervalo.

Após esse momento, pediremos para que algum representante de cada grupo compareça ao quadro para registrar os resultados encontrados. Nesse momento, iremos formalizar as relações encontradas e "nomeá-las" de acordo, montando também uma tabela de ângulos notáveis no quadro.

Dando sequência a esta atividade, realizaremos a construção no quadro das leis do seno e cosseno. Assim, desenharemos no quadro triângulos genéricos (não necessariamente retângulos) e apresentaremos uma construção geométrica dessas duas relações e, após cada uma, iremos apresentar um exercício de fixação e pedir que os alunos realizem outro.

1. Encontre o valor de *x*



Finalmente, entregaremos uma folha de exercícios para os alunos e pediremos para que eles os resolvam até o final da aula, onde ajudaremos a sanar as dúvidas e fixar as relações vistas.

Referências:

ALMOULOUD, Saddo Ag; SILVA, Maria José Ferreira da; MIGUEL, Maria Inez Rodrigues; FUSCO, Cristiana Abud da Silva. Formação de professores de Matemática e apreensão significativa de problemas envolvendo provas e demonstrações. **Educ. Mat. Pesqui.**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 217-246, maio 2008. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/1744/1135/3561. Acesso em: 06 out. 2024.

Relatório

No dia 26 de outubro, a aula contou com a presença de apenas dois alunos. Diante do número reduzido, aguardamos até às 08:10 na expectativa de que mais estudantes chegassem. Como isso não ocorreu, buscamos um dos professores orientadores e perguntamos sobre a possibilidade de unir nossa turma a outra, pois o número de alunos presentes não permitia a realização da aula planejada. A professora concordou, e nos juntamos à turma 4. Nessa turma, os alunos estavam organizados em grupos de quatro, e nossos dois alunos se integraram a um grupo que ainda não havia sido formado.

Após uma conversa breve com os responsáveis pela turma 4, decidimos seguir o planejamento deles para evitar confusão ou dificuldades na integração das atividades. Eles nos forneceram uma cópia do plano de aula, que lemos para nos situarmos. Em seguida, iniciaram a aula com um problema chamado "Problema da Choupana". A proposta consistia em uma construção hipotética de uma choupana de madeira, utilizando um pilar de concreto já existente. Sabendo que as madeiras do telhado tinham 2,5 metros de comprimento e formavam um ângulo de 65° com o pilar, os alunos deveriam calcular o comprimento da área coberta. Para isso, receberam papel milimetrado e foram instruídos a desenhar a estrutura em escala reduzida, medir com régua a área coberta e utilizar regra de três para encontrar o valor real. O objetivo era que percebessem que, em triângulos retângulos semelhantes, a razão entre lados correspondentes permanece constante.

Após a resolução e correção do problema no quadro, foram introduzidos os conceitos de seno, cosseno e tangente. Em seguida, os estagiários apresentaram uma tabela com diversos valores de seno e cosseno, explicando como, antes da invenção das calculadoras, esses cálculos eram feitos com auxílio de tabelas trigonométricas. Consultaram o valor do seno de 65° e compararam com os resultados obtidos no problema da choupana. Para fixação, os alunos resolveram três exercícios utilizando a tabela projetada. A cada exercício, foi dado um tempo para a resolução, e os estagiários se revezaram na correção no quadro junto com os alunos.

Na segunda parte da aula, foi apresentado um experimento clássico da Astronomia: a estimativa da distância do Sol à Terra em comparação com a distância da Lua à Terra, feita pelo filósofo grego Aristarco. Utilizando um globo terrestre, uma lanterna de celular representando o Sol e uma bola de isopor representando a Lua, um dos estagiários explicou a metodologia do experimento. O aplicativo Stellarium foi utilizado para complementar a explicação. Os alunos demonstraram grande interesse, participando ativamente e fazendo perguntas. Ao final, foram desafiados a identificar o erro de Aristarco, que o levou a concluir que o Sol estava apenas 20 vezes mais distante da Terra do que a Lua. Após algumas hipóteses levantadas pelos alunos, foi explicado que o erro estava na medição do ângulo entre o Sol, a Terra e a Lua, que ele supôs ser de 87°, quando na realidade é aproximadamente 89,85°. Para demonstrar o impacto dessa pequena variação, um estagiário posicionou-se a um metro de uma parede e utilizou um laser, alterando gradualmente o ângulo para mostrar como pequenas mudanças na inclinação geram grandes variações na projeção do feixe de luz. Após essa explicação, os alunos foram liberados para o intervalo.

No retorno, os estagiários explicaram os senos e os cossenos dos ângulos de 30°, 45° e 60° de forma expositiva. Para o ângulo de 45°, ilustraram um quadrado de lado 1, dividido por uma diagonal, formando dois triângulos retângulos. Com o Teorema de Pitágoras, chegaram aos valores do seno e cosseno desse ângulo. Para os ângulos de 30° e 60°, utilizaram um triângulo equilátero e novamente aplicamos o Teorema de Pitágoras. A partir desses cálculos, construíram a tabela dos ângulos notáveis e utilizaram uma música popular para auxiliar na memorização dos valores.

O restante da aula foi dedicado à resolução de uma lista de exercícios, disponibilizada pelos estagiários para fixação do conteúdo. Durante essa etapa, todos os estagiários deram assistência individual aos grupos e corrigiram os exercícios no quadro conforme os alunos concluíam as resoluções. Ao final da aula, agradecemos a participação dos alunos e o acolhimento da turma 4, antes de dispensá-los.

Materiais utilizados

- Nenhum material foi utilizado, pois não conseguimos aplicar esta aula devido ao ‘aulão’ do ENEM.

ENCONTRO 8 – 09/11/2024

Plano de aula

Público-Alvo: Alunos do segundo e terceiro ano do Ensino Médio

Tempo de execução: 4 horas

Conteúdo: Trigonometria no círculo

Objetivo Geral: Compreender aspectos das funções trigonométricas no círculo e suas relações.

Objetivos Específicos:

- Caracterizar o círculo trigonométrico e as suas propriedades;
- Explorar as definições de seno e cosseno dentro do círculo trigonométrico;
- Definir o conceito de radiano e a sua conexão com arcos dentro de um círculo;
- Identificar as relações fundamentais das funções seno e cosseno no círculo trigonométrico;
- Explorar a soma e a multiplicação de arcos no contexto do círculo trigonométrico

Recursos Didáticos: Quadro, giz, círculos trigonométricos impressos, círculo trigonométrico de metal, réguas, transferidores.

Metodologia:

A metodologia da aula será pela utilização de problemas progressivos para que o aluno construa o conhecimento. Nossa metodologia para os problemas progressivos se baseia na visão de Saddo, na qual a reformulação da hipótese faz com que o aluno veja diferentemente o problema.

Encaminhamento metodológico:

A aula será conduzida com uma exploração em grupos sobre as relações trigonométricas no círculo trigonométrico. Iniciaremos pedindo se eles lembram a forma com qual o círculo é definido.

Entregaremos para os alunos folhas impressas com círculos trigonométricos, pediremos que eles desenhem 3 ângulos diferentes no círculo trigonométrico, no primeiro quadrante, fazendo as seguintes perguntas para eles:

- Qual a distância entre o ponto no círculo e a reta das abscissas?
- O que acontece com a distância entre o ponto e a reta das abscissas quando o ângulo de aproxima de 90°? E quando é 90°?

- O que aconteceria com essa distância no momento que entrasse no segundo quadrante? E no terceiro? E no quarto?
- Escolha outros 3 ângulos aleatórios crescentes nos outros 3 quadrantes, e encontrem as distâncias até a reta das abscissas, coloque seus resultados em uma tabela.
- Qual o comportamento dessa distância?

Depois disso, pediremos que os alunos expliquem os resultados que eles chegaram, e as conclusões que tiraram desses experimentos com a turma.

Depois desse primeiro experimento feito, iremos pedir que façam o mesmo, no entanto, agora utilizando a distância até o eixo das ordenadas pois, assim, estarão vendo as propriedades do cosseno. Com os mesmos 5 ângulos faremos as mesmas perguntas para eles, pedindo que registrem tudo em tabelas.

- Qual a distância entre o ponto no círculo e a reta das abscissas?
- O que acontece com a distância entre o ponto e a reta das ordenadas quando o ângulo de aproxima de 90°? E quando é 90°? E quando se aproxima de 180°?
- O que acontece com essa distância no segundo quadrante? E no terceiro? E no quarto?
- Qual o comportamento dessa distância?

Esperamos que esse experimento demore a maior parte do tempo antes do intervalo, pediremos que os alunos façam um sumário de tudo que conseguiram perceber nesse experimento sobre o funcionamento dessas diferentes distâncias no círculo trigonométrico.

Iremos conectar essa ideia que exploraram com a ideia de triângulos passada na aula anterior fazendo o desenho dos triângulos relacionados aos arcos, traçando a distância até a reta das abscissas, pedindo que identifiquem que o ângulo formado é de 90°, fazendo disso um triângulo retângulo. Com isso, iremos lembrar da definição do círculo trigonométrico entregue no começo, um círculo de raio 1, pedindo então que eles identifiquem que o raio do círculo é a hipotenusa do triângulo formado, e o que isso implica para os catetos.

Depois da formalização da exploração anterior, esperamos definir o conceito de radiano, explicando a conexão entre “ângulos” e “arcos”, lembrando da ideia de que a circunferência de um círculo qualquer é igual a $2\pi r$, deixando assim uma forma de se definir ângulos com base na circunferência, no qual o ângulo é igual ao tamanho do arco formado.

Finalmente, entregaremos uma folha de exercícios para os alunos e pediremos para que eles os resolvam até o final da aula, onde ajudaremos a sanar as dúvidas e fixar as relações vistas.

Referências:

ALMOULOUD, Saddo Ag; SILVA, Maria José Ferreira da; MIGUEL, Maria Inez Rodrigues; FUSCO, Cristiana Abud da Silva. Formação de professores de Matemática e apreensão significativa de problemas envolvendo provas e demonstrações. **Educ. Mat. Pesqui.**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 217-246, maio 2008. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/1744/1135/3561. Acesso em: 06 out. 2024.

Relatório

Iniciamos a aula do dia nove de novembro de 2024 com apenas 5 alunos, um número maior que o encontro anterior, mas ainda sim um número menor que o normal, devido ao ‘aulão’ do ENEM que a Unioeste estava oferecendo durante esse período. Iniciamos essa aula sem a presença do professor Ruan, pois o mesmo estava em viagem para a prova de mestrado, por causa disso um de nossos orientadores, professor Tiago Emanuel Klüber, teve uma presença maior na aula.

Devido ao fato de que na aula anterior apenas dois alunos vieram, havia a necessidade de fazer uma introdução à trigonometria que não estava prevista no plano de aula, visto que o mesmo foi feito sob a assunção que a maioria dos alunos iria comparecer à aula anterior. Assim sendo, introduzimos o conceito subjacente à trigonometria como originando em triângulos, com as funções ‘seno, cosseno e tangente’, sendo razões entre os lados do triângulo retângulo mantém-se as mesmas caso o triângulo seja proporcional, explicamos então que as relações são definidas a partir do ângulo, visto que todo triângulo retângulo se tiver algum outro ângulo além do reto em comum, será proporcional ao original.

Com essas relações explicadas em um triângulo retângulo, desenhamos um círculo unitário, centrado na origem de um plano cartesiano, no quadro, e pedimos para que os alunos tentem identificar o triângulo retângulo escondido quando posicionamos um ponto no círculo e desenhamos o raio até ele. Um aluno propôs que desenhássemos o segmento até o eixo y, outra propôs que desenhássemos até o eixo x. Desenhamos ambos, e pedimos para que eles percebessem que o ângulo formado com os eixos é de exatamente 90º, visto que a reta desenhada é perpendicular aos eixos, assim sendo, forma um retângulo, com o raio do círculo formando uma diagonal que faz metade dele ser um triângulo retângulo.

Com isso, pedimos para que eles percebessem que como o triângulo é retângulo, e a hipotenusa igual a 1, podemos calcular o seno do ângulo, e chegar no resultado que a distância até o eixo x é exatamente a medida do seno do ângulo escolhido, enquanto a distância até o eixo y é exatamente a medida do cosseno.

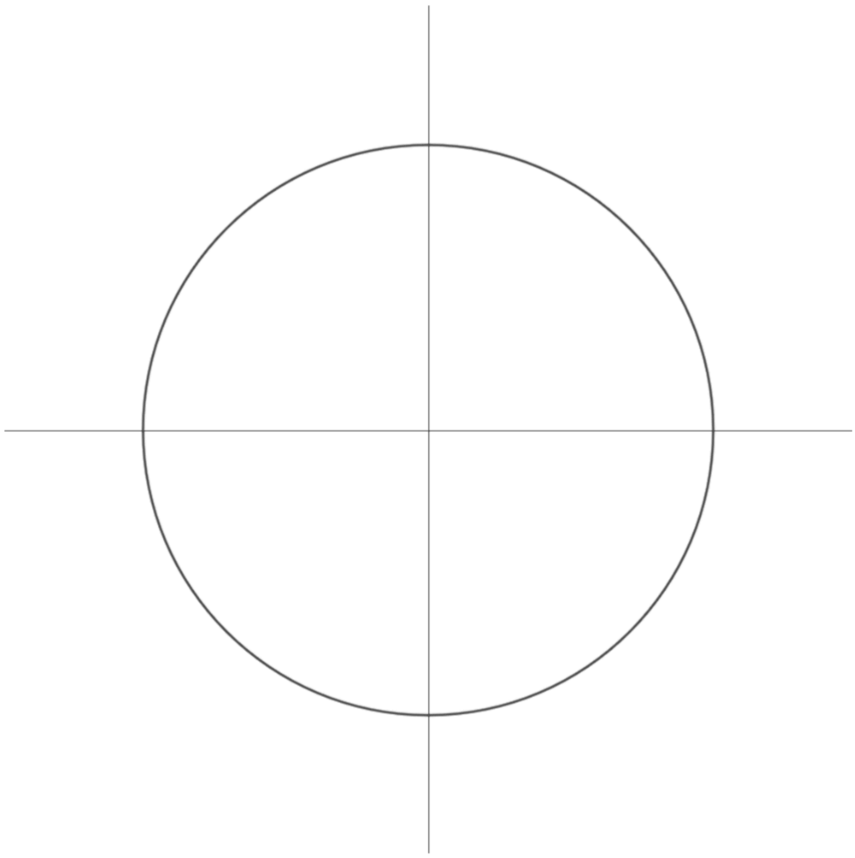
Depois disso, entregamos para eles uma impressão de um círculo com eixos, que pode ser visto na Figura 5. Pedimos então para que eles marcassem alguns pontos na circunferência com o auxílio de réguas e transferidores que também os emprestamos, e que medissem a distância dos pontos escolhidos até a reta das abscissas. Com isso pedimos que eles respondessem as questões que podem ser encontradas no plano de aula, muitos não chegaram na ideia de que ao entrar no terceiro quadrante, o valor do seno seria negativo, visto que os mesmos estavam considerando a distância até o eixo x, não o ponto projetado no eixo y. Depois de percebermos isso, explicamos que a medida da distância projeta-se de forma igual no eixo ao qual ela é paralela, e que o ponto que é projetado é o que se utiliza para determinar o valor do seno.

Depois disso, pedimos que eles realizassem a mesma atividade, mas dessa vez com a distância até o eixo y, projetada no eixo x. Uma das primeiras observações que eles fizeram é que as medidas se assemelhavam às medidas do seno, mas com "o círculo virado 90º". Os alunos conseguiram observar o funcionamento das relações trigonométricas no círculo, e perguntaram de onde vem a medida da tangente, visto que é a única que não foi vista até agora, depois disso retornamos ao quadro e desenhamos a reta tangente ao círculo que passa pelo ponto (1,0), e estendemos a reta desenhada por um ponto até a reta tangente, lembrando os alunos o que a palavra "tangente" significa – que "toca" – e os alunos mencionam entender o funcionamento, e por que o "sinal" muda quando você anda pelos quadrantes com esse ponto na circunferência, e como não há ponto de interseção quando o ângulo é 90º ou 270º.

Depois disso, explicamos para os alunos como definir radianos, e a conversão entre radianos e graus a partir dos arcos dentro do círculo. Os alunos apresentaram alguma dificuldade com a explicação disso pelo professor Leonardo, e o professor Tiago teve de ajudar com uma explicação para que fizesse sentido para os alunos. Depois dessa explicação, entregamos a eles a lista de exercícios para eles treinarem o que aprenderam nesta aula, deixando ela como tarefa.

Materiais utilizados

Figura 5: Círculo com eixos



Fonte: Elaborado pelos autores

- **Lista de Exercícios**

1. (PUC) Em uma aula prática de Topografia, os alunos aprendiam a trabalhar com o teodolito, instrumento usado para medir ângulos. Com o auxílio desse instrumento, é possível medir a largura y de um rio. De um ponto A, o observador desloca-se 100 metros na direção do percurso do rio, e então visualiza uma árvore no ponto C, localizada na margem oposta sob um ângulo de 60°, conforme a figura abaixo. Nessas condições, qual é a largura do rio?

2. (FUVEST) (adaptada) No quadrilátero a seguir, BC = CD = 3 cm, AB = 2 cm, $AD\hat{C}=60°$ e $AB\hat{C}=90°$. Qual é a medida da soma dos lados do quadrilátero?

3. (UEL) Um engenheiro fez um projeto para a construção de um prédio (andar térreo e mais 6 andares), no qual a diferença de altura entre o piso de um andar e o piso do andar imediatamente superior é de 3,5m. Durante a construção, foi necessária a utilização de rampas para transporte de material do chão do andar térreo até os andares superiores. Uma rampa lisa de 21m de comprimento, fazendo ângulo de 30º com o plano horizontal, foi utilizada. Uma pessoa que subir essa rampa inteira transportará material, no máximo, até o piso de qual andar?

4. (Unesp) Um professor de geografia forneceu a seus alunos um mapa do estado de São Paulo que informava que as distâncias aproximadas em linha reta entre os pontos que representam as cidades de São Paulo e Campinas e entre os pontos que representam as cidades de São Paulo e Guaratinguetá eram, respectivamente, 80 km e 160 km. Um dos alunos observou, então, que as distâncias em linha reta entre os pontos que representam as cidades de São Paulo, Campinas e Sorocaba formavam um triângulo equilátero. Já um outro aluno notou que as distâncias em linha reta entre os pontos que representam as cidades de São Paulo, Guaratinguetá e Campinas formavam um triângulo retângulo, conforme mostra o mapa. Com essas informações qual é a distância em linha reta entre os pontos que representam as cidades de Guaratinguetá e Sorocaba, em km?
5. (ENEM 2018) Para decorar um cilindro circular reto será usada uma faixa retangular de papel transparente, na qual está desenhada em negrito uma diagonal que forma com a borda inferior. O raio da base do cilindro mede e ao enrolar a faixa obtém-se uma linha em formato de hélice, como na figura. Qual é o valor da medida da altura do cilindro, em centímetro?

6. Raios de luz solar estão atingindo a superfície de um lago formando um ângulo xx com a sua superfície, conforme indica a figura. Em determinadas condições, pode-se supor que a intensidade luminosa desses raios, na superfície do lago, seja dada aproximadamente por $I(x)=k \cdot sen(x)I(x)=k \cdot sen(x)$

sendo k uma constante, e supondo-se que X está entre 0° e 90º. Quando x = 30º, a intensidade luminosa se reduz a qual percentual de seu valor máximo?

7. (Enem 2023) O mastro de uma bandeira foi instalado perpendicularmente ao solo em uma região plana. Devido aos fortes ventos, três cabos de aço, de mesmo comprimento, serão instalados para dar sustentação ao mastro. Cada cabo de aço ficará perfeitamente esticado, com uma extremidade num ponto P do mastro, a uma altura h do solo, e a outra extremidade, num ponto no chão, como mostra a figura.

8. Os cabos de aço formam um ângulo a com o plano do chão. Por medida de segurança, há apenas três opções de instalação:
opção I: h = 11m e a = 30;
opção II: h = 12m e a = 45;
opção III: h = 18m e a=60.
A opção a ser escolhida é aquela em que a medida dos cabos seja a menor possível. Qual será a medida, em metro, de cada um dos cabos a serem instalados?

ENCONTRO 9 – 23/11/2024
Plano de aula
Público-Alvo: Alunos do terceiro ano do Ensino Médio
Tempo de execução: 4 horas-aula
Conteúdo: Funções trigonométricas
Objetivo Geral: Compreender o comportamento e as características das funções trigonométricas (seno, cosseno e tangente), seus gráficos e como os diferentes coeficientes afetam suas representações, desenvolvendo a capacidade de análise e interpretação gráfica.
Objetivos Específicos:

- Interpretar período e amplitude da função seno, bem como entender os efeitos de seus coeficientes e relacionar sua forma algébrica com a representação gráfica, identificando domínio, imagem e zeros.

- Estabelecer relações entre as funções seno e cosseno, reconhecendo o deslocamento de fase e a transformação $\cos(x) = \text{sen}(x + \pi/2)$, além de analisar seus pontos críticos e comportamentos similares.
- Compreender a função tangente como razão entre seno e cosseno, analisando suas assíntotas verticais, período característico e comportamento único, além de determinar seu domínio e imagem.
- Desenvolver habilidades de interpretação gráfica relacionando coeficientes com transformações, reconhecendo padrões de periodicidade e analisando pontos de intersecção em funções trigonométricas.
- Aplicar os conhecimentos adquiridos na construção e transformação de funções trigonométricas, resolvendo problemas que envolvam periodicidade e relacionando com situações práticas.
- Aprimorar a visualização geométrica e o pensamento analítico através do estudo das transformações trigonométricas, estabelecendo conexões entre diferentes representações matemáticas e desenvolvendo estratégias de resolução de problemas.

Recursos Didáticos: Quadro, giz, lista de problemas progressivos, computadores para o uso do geogebra.

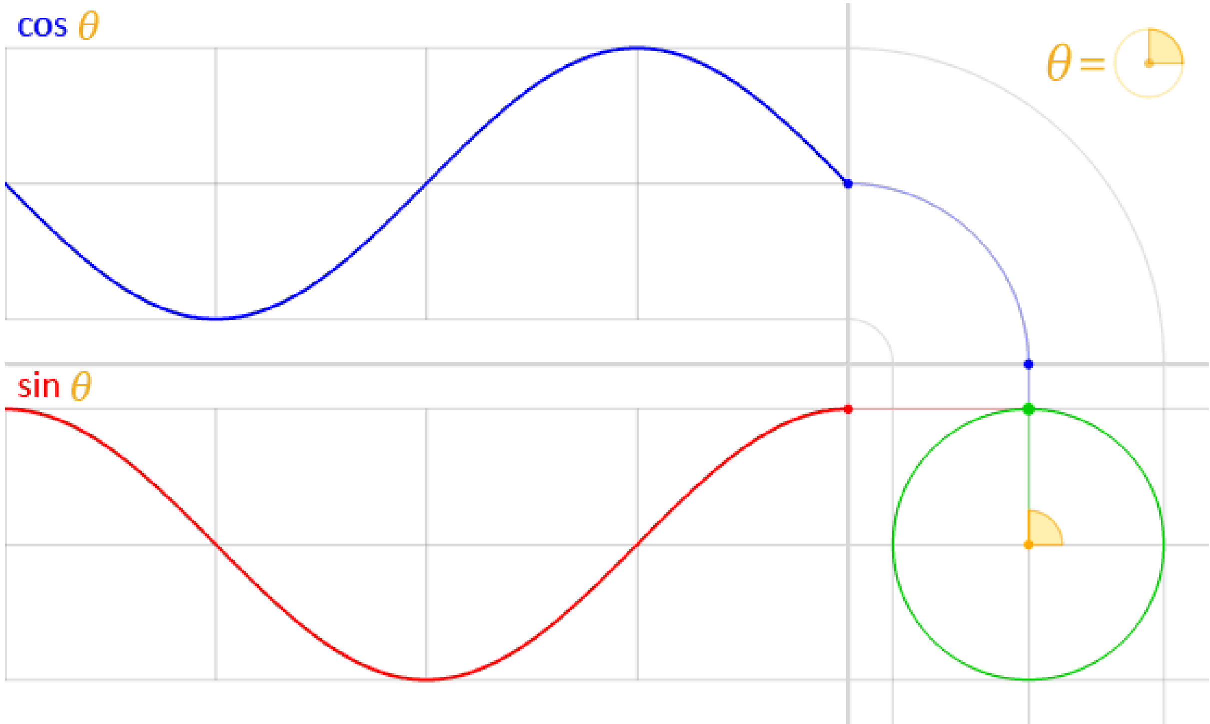
Encaminhamento metodológico:

Como no trabalho no qual nos baseamos para a construção desta aula utiliza a metodologia do ensino matemático tecnológico como visto por Borba, Penteado e Lacerda sobre a possibilidade da construção do conhecimento pelo uso de tecnologias interativas que demonstram a natureza de objetos matemáticos de maneira com qual os alunos possam compreendê-lo de maneira própria por experimentação. Dessa maneira, iremos expor os conceitos a partir de problemas progressivos, nos baseando na definição de Saddo (2008), os quais devem guiar o desenvolvimento dos alunos.

Sequenciamento da aula e procedimentos:

Iniciaremos esta aula explicando aos alunos a atividade que iremos realizar: será uma atividade exploratória com o auxílio do *geogebra* em que eles deverão "desvendar" as características das funções trigonométricas a partir de perguntas guiadas. Enquanto explicamos a atividade, os *tablets* serão distribuídos pela turma.

Primeiramente, realizaremos uma breve introdução verbal ao que seria uma função trigonométrica a partir de uma visualização dos valores de seno e cosseno quando o ângulo varia no círculo trigonométrico:



Com isso, buscaremos instigar os alunos a observar a continuidade dos valores de seno e cosseno.

Problema 1– insira a função $y = sen(x)$
Sobre esta função, responda: 1. O gráfico forma algum padrão que se repete? Como você descreveria este padrão? 2. Qual é o maior valor que a função atinge? E o menor? 3. Quanto vale y quando x = 0? E quando x = π/2? 4. A cada quanto radianos o padrão se repete completamente? 5. Este intervalo de repetição tem um nome especial. Você sabe qual é?

Problema 2– insira a função $y = 2sen(x)$

Compare com a função anterior:

1. O que mudou no comportamento do gráfico?
2. O padrão ainda se repete na mesma frequência?
3. Qual é agora o valor máximo e mínimo da função?
4. O que o coeficiente 2 ocasionou no gráfico?
5. Se mudássemos para y = 3sen(x), o que aconteceria com os valores máximo e mínimo?

Problema 3– insira a função $y = asen(x)$

Veja que surgiu, na barra lateral, um controle deslizante. Ele altera o valor do coeficiente *a*. Mexa nele, observando seus valores e descreva o que estes ocasionam no gráfico da função.

1. Quanto maior o coeficiente *a*, o que acontece com o gráfico?
2. Você consegue generalizar a função deste coeficiente?

Problema 4 – insira a função $y = sen(2x)$

Sobre esta função, responda:

1. O que se pode notar sobre o gráfico?
2. O valor de 2 realiza a mesma função do que nos exemplos anteriores?
3. O padrão ainda se repete? Com que frequência?
4. Os valores máximo e mínimo mudaram em relação à função y = sen(x)?
5. O que o coeficiente 2 multiplicando x ocasionou no gráfico?
6. Qual a diferença entre *y* = *2sen(x*) e *y* = *sen(2x)*?
7. Como você descreveria o "aperto" ou "esticamento" do gráfico?
8. Generalize substituindo a função por *y=sen(Bx)*

Problema 5 – Compare y = sen(x) e y = sen(x + π/2)
Sobre esta função, responda: 1. O que aconteceu com o gráfico da função quando somamos π/2? 2. O gráfico se moveu para direita ou para esquerda? 3. Em quantos radianos ele se deslocou? 4. Onde está agora o primeiro ponto em que a função cruza o eixo y? 5. Os valores máximos e mínimos mudaram de valor ou apenas de posição?

Problema 6 – insira y = sen(x + π)
Sobre esta função, responda: 1. Qual a diferença entre este gráfico e o da função y = sen(x)? 2. Ele é igual ao gráfico de y = -sen(x)? Por quê? 3. Quanto vale y quando x = 0 nesta função? 4. O deslocamento é de quantos radianos em relação à função original? 5. O período da função foi alterado?

Problema 7 – insira a função y = asen(bx + c) + d
Sobre esta função, responda: 1. Qual coeficiente altera a amplitude da onda? Quanto vale a amplitude em cada caso? 2. Qual coeficiente altera a frequência/período? Calcule o período em cada caso. 3. Qual coeficiente causa deslocamento horizontal? De quanto é este deslocamento? 4. Qual coeficiente causa deslocamento vertical? Quanto o gráfico se desloca?

Problema 8 – Compare y = sen(x) e y = cos(x)
Sobre esta função, responda: 1. Em x = 0, quanto vale cada função? 2. Qual função atinge primeiro seu valor máximo? 3. Quanto vale y para cada função quando x = π/2? 4. Se deslocarmos o gráfico do seno π/2 unidades para a esquerda, o que obtemos? 5. O que isso nos diz sobre a relação entre seno e cosseno? 6. Os períodos são iguais? Quanto vale cada um? Compare onde ocorrem: 1. Os valores máximos do seno e do cosseno 2. Os valores mínimos 3. Os zeros (intersecção com eixo x) 4. Qual é a diferença, em radianos, entre os pontos máximos das duas funções? 5. E entre os zeros das funções? 6. Complete: cos(x) = sen(x + ___)

Problema 9 – Insira *y=tan(x)*
Compare com sen(x) e cos(x): 1. Por que a tangente tem "quebras" no gráfico? 2. O que acontece com a tangente nos pontos onde cos(x) = 0? 3. Onde a tangente cruza o eixo x? Por que isso acontece? 4. Qual é o período da tangente? Por que é diferente do seno e cosseno? 5. O gráfico é limitado como o seno e cosseno? Por que? 6. Lembre que tan(x) = sen(x)/cos(x). Use isso para explicar o comportamento nos pontos de "quebra". 7. Por que elas ocorrem exatamente nestes pontos? 8. O que acontece com os valores da função próximo às assíntotas?

9. Como podemos prever onde estarão todas as assíntotas? 10. Qual é seu domínio? 11. Qual é sua imagem? Por que é diferente do seno e cosseno? 12. Como escrever o domínio usando notação matemática?

Problema 10 – Insira *y=tan(2x)*
Sobre esta função, responda: 1. Qual é o novo período da função? 2. Onde estão as novas assíntotas? 3. A função cruza o eixo x nos mesmos pontos que tan(x)? 4. Como a velocidade de crescimento se compara com tan(x)? 5. Se aumentarmos ainda mais o coeficiente de x, o que acontece com o período?

Durante o processo investigativo, devemos ajudar na síntese e reflexão dos conceitos com questionamentos como os seguintes:

- Para qualquer função y = asen(bx + c) + d:
    - Como calcular o período?
    - Como calcular a amplitude?
    - Como determinar os valores máximo e mínimo?
    - Como prever os pontos de intersecção com o eixo y?
    - Como determinar os zeros da função?
- Se eu dobro o valor de algum dos coeficientes, eu dobro o valor da função?
- É verdade que *sen(x+y) = sen(x) + sen(y)?*
- Dada a função y = 3cos(2x - π/3):
    - Como podemos reescrevê-la usando o seno?
    - Qual seria o deslocamento necessário?
    - A amplitude seria a mesma?
    - O período seria o mesmo?
    - Os pontos de intersecção com o eixo y seriam os mesmos?

- Faça o esboço de uma tabela comparando cada uma das funções, suas frequência, amplitudes, domínio, imagem e o efeito dos coeficientes.

Neste momento, devemos pedir aos alunos que compartilhem suas descobertas com os colegas. Espera-se que esta atividade dure por volta de ¾ da aula.

Até o final da aula, apresentaremos um *Kahoot* para os alunos, que servirá como revisão de todo o conteúdo de trigonometria trabalhado até o momento: ele possuirá perguntas sobre trigonometria no triângulo, círculo e funções trigonométricas.

Finalmente, entregaremos uma lista de tarefas para os alunos, a qual eles realizarão em sala caso haja tempo.

Referências:

ALMOULOUD, Saddo Ag; SILVA, Maria José Ferreira da; MIGUEL, Maria Inez Rodrigues; FUSCO, Cristiana Abud da Silva. Formação de professores de Matemática e apreensão significativa de problemas envolvendo provas e demonstrações. **Educ. Mat. Pesqui.**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 217-246, maio 2008. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/1744/1135/3561. Acesso em: 06 out. 2024.

JESUS, Danilo do Nascimento de; DULLIUS, Maria Madalena. **O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO DO 2º GRAU**: o caso da 1ª série do ensino médio de uma escola federal. Vale do Taquiri, 2018. Disponível em: https://www.univates.br/ppgece/media/pdf/2018/o_uso_do_software_geogebra_para_o_ensino_de_funcao_do_2_grau_o_caso_da_1_serie_do_ensino_medio_de_uma_escola_federal.pdf. Acesso em: 06 out. 2024

Relatório

Na manhã do dia 23 de novembro de 2024, iniciamos a aula às 8:10 no laboratório de informática da UNIOESTE, com a expectativa de explorar as funções trigonométricas através de uma sequência de problemas progressivos. O professor Ruan aguardava os alunos na sala tradicional, enquanto os professores Leonardo e Luiza os recebiam no laboratório, porém, para nossa surpresa, apenas três alunos compareceram. Essa baixa adesão permitiu um acompanhamento mais individualizado, mas também causou certa desmoralização nos professores, visto que era o último dia de aula. Essa discrepância entre o previsto e o real nos levou a refletir sobre como o comprometimento dos alunos influencia a dinâmica da aula e a eficácia das metodologias aplicadas.

A proposta pedagógica foi inspirada nas atividades anteriores do PROMAT e na experiência dos professores Ruan e Leonardo no ensino de gráficos de funções quadráticas, buscando que os alunos compreendessem o comportamento das funções trigonométricas a partir da análise de seus gráficos. Desde o início, o objetivo era que cada questão apresentada, organizada para adicionar um novo elemento ao entendimento dos conceitos, gerasse reflexão crítica dos alunos sobre os efeitos das transformações. No entanto, logo nos deparamos com dificuldades logísticas que já havíamos identificado em atividades anteriores, quando o tempo para organizar os alunos no ambiente do laboratório e introduzi-los ao uso dos computadores se mostrou maior do que o esperado. Esse desafio, agravado por problemas técnicos no computador destinado a uso do professor do laboratório que nos obrigaram a recorrer aos notebooks pessoais, ocasionou um atraso significativo, fazendo com que a aula fosse efetivamente iniciada às 8:30.

Durante a aula, a utilização do GeoGebra como ferramenta para a visualização dos gráficos das funções revelou-se, por um lado, uma poderosa estratégia para estimular a intuição dos alunos, mas, por outro, demonstrou limitações que impactaram o processo de aprendizagem. A ausência de impressões prévias dos problemas progressivos forçou os alunos a lerem as questões diretamente do projetor, o que, embora tenha permitido uma intervenção mais personalizada, também limitou a autonomia necessária para uma reflexão aprofundada. Essa experiência evidenciou que a preparação dos materiais é crucial para que os alunos possam se envolver de maneira mais autônoma e significativa com os conteúdos, tornando claro que a organização prévia dos enunciados poderia ter facilitado o processo de construção do conhecimento.

Ao iniciar as atividades com o GeoGebra, observamos que os alunos enfrentaram dificuldades tanto com a familiarização da ferramenta quanto com a interpretação das mudanças nos gráficos, especialmente em relação aos conceitos de frequência, amplitude e periodicidade. A complexidade desses conceitos se fez sentir de maneira intensa, uma vez que os alunos não conseguiram estabelecer de forma imediata a relação entre as alterações nos coeficientes e o comportamento das funções. Em determinado momento, uma discussão produtiva emergiu, envolvendo o professor Tiago Klüber e o compartilhamento de experiências do professor Ruan oriundas de sua Iniciação Científica, o que enriqueceu a compreensão dos conceitos e ressaltou a importância de contextualizar o conteúdo teórico com exemplos práticos.

Conforme a aula avançava, alguns alunos começaram a superar as dificuldades iniciais e passaram a utilizar de forma mais autônoma os controles deslizantes do GeoGebra, explorando melhor os efeitos dos coeficientes das funções. Esse progresso, embora pontual, demonstrou o potencial da metodologia adotada, evidenciando que o uso de tecnologias pode efetivamente facilitar a visualização e o entendimento dos conceitos matemáticos, desde que as ferramentas sejam utilizadas de maneira adequada. Contudo, o tempo restrito acabou por nos forçar a pular etapas importantes, especialmente aquelas que envolviam a exploração das relações entre as diferentes funções trigonométricas, como no caso dos exercícios com a função cosseno. A decisão de simplificar esse conteúdo, limitando-se a uma explicação verbal sobre a equivalência do cosseno com o seno deslocado, deixou claro que o gerenciamento do tempo e a priorização dos conteúdos são aspectos essenciais para o sucesso do processo de ensino-aprendizagem.

Outra dificuldade significativa que se apresentou foi a forma como o GeoGebra exibia os pontos notáveis dos gráficos, apresentando-os em formato decimal, como 3.1415, em vez de utilizar a notação simbólica com o símbolo π. Essa limitação causou confusão nos alunos, que encontraram obstáculos para identificar as relações fundamentais entre os valores exibidos e os conceitos matemáticos envolvidos, forçando os professores a intervenções constantes para explicar que tais pontos representavam frações de π, como π e π/2. Ficou evidente que, embora a tecnologia seja uma aliada poderosa, sua eficácia depende de uma integração cuidadosa com os objetivos pedagógicos e da preparação dos professores para lidar com suas limitações.

Quando abordamos a função tangente, o debate se voltou para os conceitos de continuidade e descontinuidade dos gráficos, em uma tentativa de explicar as "quebras" observadas na representação visual. Os alunos, no entanto, não conseguiram identificar que essas descontinuidades ocorriam precisamente nos pontos onde o cosseno se anula, possivelmente devido à dificuldade de associar os valores decimais apresentados pelo software com suas representações simbólicas, como π/2.

Perto do final da aula, um último contratempo marcou o encerramento da atividade: a bateria do notebook do professor acabou, impossibilitando a projeção da tela e a realização do Kahoot previamente planejado para a revisão dos conteúdos trabalhados. Em decorrência desse imprevisto, optamos por entregar uma lista de exercícios aos alunos, o que reduziu a interatividade e a dinâmica de fechamento que havíamos idealizado. Essa situação serviu como um lembrete contundente da importância de se preparar para imprevistos e de manter uma postura flexível, capaz de transformar dificuldades técnicas em oportunidades para rever e adaptar a metodologia empregada.

Ao refletir sobre a aula de 23 de novembro, é possível reconhecer que, apesar dos diversos desafios enfrentados – desde a baixa adesão dos alunos e os problemas de organização do laboratório até as limitações impostas pelo uso da tecnologia – a experiência foi rica em aprendizados tanto para os alunos quanto para os professores. Cada obstáculo enfrentado evidenciou pontos que precisam ser aprimorados, como a necessidade de uma melhor preparação dos materiais, o ajuste dos recursos tecnológicos para a exibição correta dos conteúdos matemáticos e um gerenciamento de tempo que permita abordar todos os aspectos essenciais do tema. A experiência permitu compreendermos que o uso de tecnologias interativas, embora apresente desafios, pode ser uma ferramenta poderosa para estimular a intuição e promover uma compreensão mais profunda dos conceitos matemáticos, desde que acompanhada de um planejamento meticuloso e de estratégias que considerem as limitações práticas do ambiente escolar. Em última análise, a aula não foi tão produtiva quanto havíamos idealizado, mas os momentos de interação e reflexão evidenciaram que, mesmo em meio a dificuldades, é possível construir um processo de ensino-aprendizagem que valorize a experiência prática e o pensamento crítico, transformando cada desafio em uma oportunidade para o aprimoramento contínuo da prática pedagógica.

ENCONTRO 10 – 25/11/2023

Plano de aula

Maíri e Michelli: **Quebra-cabeça**

A gincana com os quebra-cabeças consiste em resolver o problema de raciocínio lógico de cada envelope para obter as peças dos quebra-cabeça. Vale ressaltar que o grupo só pegará o próximo envelope se ele conseguir montar todas as peças que ja possui. O quebra-cabeça montado inteiro vale 10 pontos (0,25 vezes cada peça montada), caso haja empate, o desempate é realizado através da maior quantidade de peças montadas no menor número de tempo.


Problemas de lógica:

1.Como dividir uma pizza em 8 pedaços realizando apenas três cortes?

R: Basta cortar a pizza em 4 partes com dois cortes perpendiculares e um corte circular, como se fosse pôr recheio na pizza, tem-se assim 8 pedaços.

2.Existem quantas maneiras de se ter vinte e cinco reais apenas com cédulas de um, cinco e dez reais?

R:12

3.Um estudante terminou um trabalho que tinha n páginas. Para numerar todas essas páginas iniciando com a página 1, ele escreveu 270 algarismos. Então o valor de n é?

R:126

4.O pai do Padre é o único filho do meu pai. O que o Padre é meu?

R: filho.

5.A escada de um prédio tem 25 degraus. Se Maria subiu 5 degraus, desceu 9 e ao subir mais 6 viu que só faltavam 3 degraus para chegar ao último degrau da escada, em que degrau ela estava quando começou a contar?
R: 20

6. Sabe-se que:
Rifa tem 6 (seis) anos a mais que Ana e 13 (treze) anos a mais que Bia;
Paula tem 6 (seis) anos a mais que Bia.
Então, com relação as 4 (quatro) pessoas citadas, é correto dizer que:
a) Rifa não é a mais velha;
b) Ana é a mais nova;
c) Paula é mais nova que Ana;
d) Paula e Ana tem a mesma idade;
e) Rifa e Paula tem a mesma idade.
R: Paula é mais nova que Ana.

Leonardo e Ruan: SET!

O jogo SET! é um jogo competitivo em tempo real em que cada jogador buscar formar conjuntos de cartas entre as do tabuleiro.

O jogo decorre da seguinte forma:

1. Cada carta do jogo possui quatro características -- forma presente, cor, preenchimento e quantidade de formas;
2. Um SET é um conjunto de três cartas, em que cartas entre as cartas, cada uma das características devem ser todas diferentes;
3. Um jogador embaralha todas as cartas e, então, posiciona 12 cartas no tabuleiro;
4. Os jogadores irão competir contra os professores, buscando encontrar SETs dentre as cartas presentes;
5. Quando um jogador encontra um SET, ele anuncia para o grupo, mostra as cartas encontradas e, se for realmente um SET, ele as toma para si. Em seguida, as três cartas são repostas e o jogo continua;

O jogo vai percorrer por 20 minutos. Ao final desse tempo, os jogadores contarão a quantidade de SETs formados. Cada SET contará por cinco pontos.

O grupo vencendo será aquele que tiver mais SETs.

Alisson, Anderson, Cassiano e Vitor: RPG – Plano Cartesiano

Para adaptar o RPG para uma atividade rápida e pontuável, removeremos o aspecto narrativo e utilização de personagens. Utilizaremos os mapas com desafios relacionados com Geometria Analítica. Serão utilizados os 16 mapas disponíveis, formando 4 planos cartesianos com 4 quadrantes cada. Cada plano cartesiano será composto por 4 desafios, distância entre pontos, ponto médio de segmento e equações e intersecções de retas, em que cada um destes são elementos gráficos do mapa.

A pontuação será dada ao resolverem os desafios e completarem os mapas, são 0,5 pontos por desafio e 0,5 pontos ao fecharem um mapa, totalizando 2,5 pontos por mapa e 10 pontos totais. Abaixo seguem os mapas e os desafios pertinentes a cada um.

Desafios:

1. *"Centralizado entre o cacto mais ao leste e o poste mais ao sul, encontra-se o próximo desafio".*

Esse enigma faz referência ao cacto localizado no ponto (9,3) e o poste no ponto (-4,-8), e quando se diz centralizado entre esses pontos está pedindo para calcular o ponto médio entre eles. No caso (2.5, -2.5).

2. *"Duas retas, uma formada pela estátua destruída e o poste ao norte do templo alagado, e a outra formada pela lanterna e o peixe que nada para o sul. O ponto de encontro dessas linhas indica o próximo desafio."*

Essa dica faz referência à estátua danificada (-7, 6), ao poste (-7, -1) no templo, ao peixe (-1, -3) e a lanterna (-3, -1). O enigma solicita que os alunos calculem o ponto de intersecção das retas formadas pela estátua e o poste ($x = -7$) e a reta formada pelo peixe e a lanterna ($-x - y = 4$), o ponto de intersecção é a estátua inteira na igreja (-7, 3).

3. *"Para encontrar o próximo desafio, é necessário descobrir a distância entre o escaravelho e a fogueira"*

Escaravelho (5, 8), a fogueira (8, -8), e a distância é 16,28 unidades.

4. *"Qual a equação da reta que passa pela raíz morta e a grande pirâmide?"*

Esse desafio trata da equação da reta formada pela árvore seca (3, -3) e o topo da pirâmide (7, 7), que é ($-5x + 2y = -21$).

Desafios:

1. *“Para avançar para o próximo desafio, responda: qual é a fórmula que descreve com precisão a linha que passa por essa muralha?”*

O desafio envolve calcular a equação da reta que passa pela muralha do deserto ($2x + y = 24$).

2. *“Na antiga ruína, uma velha mesa repousa, enquanto no santuário, um altar venerado ergue-se em silêncio. Qual a distância entre os dois?”*.

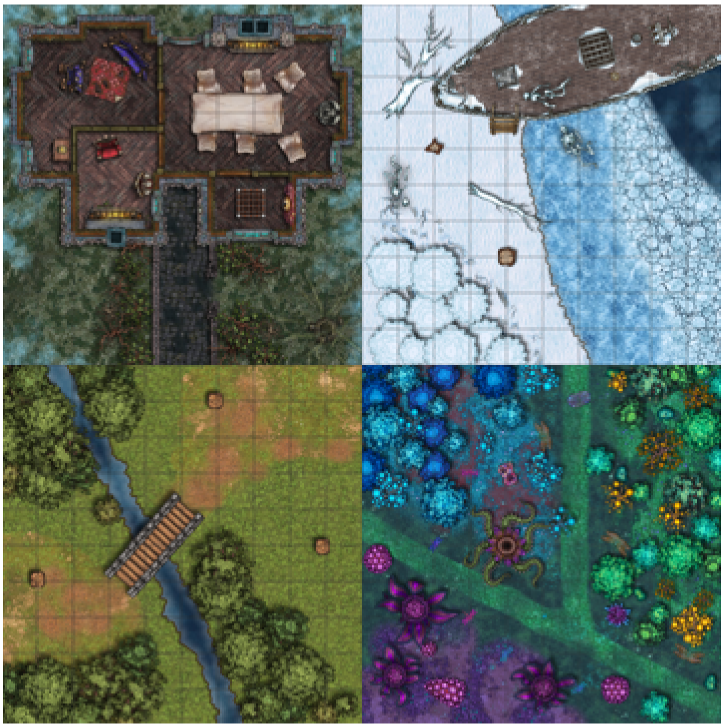
Esse enigma solicita que seja calculada a distância entre a mesa da ruína (-4, -7) e o altar no templo (6, -2), que é 11,18 unidades.

3. *“Em meio fogo um rio de lava corre fervente, enquanto um caminho perdido se esconde entre as areias quentes. A interseção entre essas duas retas revela indica o próximo desafio”*.

Esse desafio se refere ao rio de lava no inferno ($2x - 3y = -11$) e o caminho escondido no deserto ($9x - 4y = 18$) e pede sua intersecção (5.16, 7.11).

4. *“No deserto, jaz o crânio de uma besta desconhecida, e no templo, o pergaminho dos segredos esquecidos. O próximo desafio se encontra no ponto médio dos dois”*.

Essa dica solicita o ponto médio entre o crânio (4, 1) e o pergaminho (4, -2), no caso (4, -0.5).



Desafios:

1. *“Em meio a floresta existe um rio que corre de forma linear, descubra a fórmula que guia o seu caminho para o encontrar o próximo desafio”.*

   Esse enigma solicita que os alunos calculem a equação do rio ($2x + y = -17$).

2. *“Entre o medo e o gelo, uma distância deve ser encontrada, um antigo e abandonado poço e a entrada para um porão gelado”.*

Para esse enigma é necessário calcular a distância entre o poço (-1, 1) e a porta do porão do navio (4, 8), que é 8,6.

3. *“Para encontrar o próximo desafio, ache a intersecção de duas retas, uma formada pela poltrona rasgada na mansão e pela bússola no navio e a outra que passa pela ponte”.*

Esse desafio requere que o aluno encontre o ponto de intersecção entre a reta da ponte ($-x + y = 1$), e a reta formada pela poltrona rasgada e bússola ($y = 8$), que nos deixa com o ponto (7, 8).

4. *“Na floresta encantada, entre a bela flor ao sul e a planta carnívora, o próximo desafio se encontra”.*

Nesse desafio, é preciso encontrar o ponto médio entre a flor mais ao sul da floresta (5, -9) e a planta carnívora (4, -5), que é (4.5, -7).

Desafios:

1. *"Para avançar é preciso encontrar a intersecção de duas retas. Uma delas passa pelo sofá antigo da fazenda, um local de descanso e lembranças. A outra está no cemitério, entre os túmulos esquecidos, passando por um túmulo ao lado oeste do anjo guardião e o outro logo ao sul do primeiro, depois do caminho de pedra"*.

Esse desafio solicita que os jogadores encontrem o ponto de intersecção das retas formadas pelo sofá na fazenda ($x + y = 1$), e a reta formada pelos túmulos (-7, 5) e (-7, 2), a reta ($x = -7$), o ponto de intersecção é (-7, 8).

2. *"O próximo desafio se encontra no ponto médio de dois elementos. A cabeça de um cervo, que guarda memórias antigas, e um poço, onde a água guarda a promessa de sobrevivência"*.

Esse desafio pede o ponto médio entre o cervo (9, -3) e o poço (3, -5), e o ponto médio é (6, -4).

3. *"Nas planícies cartesianas esquecidas, a estátua de um anjo observa silenciosamente o horizonte, enquanto um velho barril de madeira flutua, cheio de segredos do passado. Qual a distância entre os dois?"*

Nesse desafio os jogadores precisam descobrir a distância entre o anjo (-5, 5) e o barril (-9, -8), que é 13,6.

4. *"De um lado, morto entre as palmeiras. Do outro, a estátua de Anúbis, o guardião das almas. Para prosseguir, vocês devem traçar o caminho que une esqueleto e a estátua de Anúbis"*.

Esse desafio solicita que os jogadores encontrem a equação de reta que passa pelo esqueleto (-2, -2) e a estátua de Anúbis (3, 4), que é ($-6x + 5y = 2$).

Caça ao Tesouro

Para realizar o jogo Caça ao Tesouro serão necessárias 3 estações, o qual teremos desafios que inclui medidas de arco e ângulos no ciclo trigonométrico.

Cada grupos terá um percurso de estações definidas antecipadamente.

1º Desafio: será entregue a primeira pista o qual o grupo encontrará o 1º desafio, e contemplado a resposta, o grupo recebe 2ª pista para o próximo Desafio. Assim por diante até o último desafio.

Desafio 1:

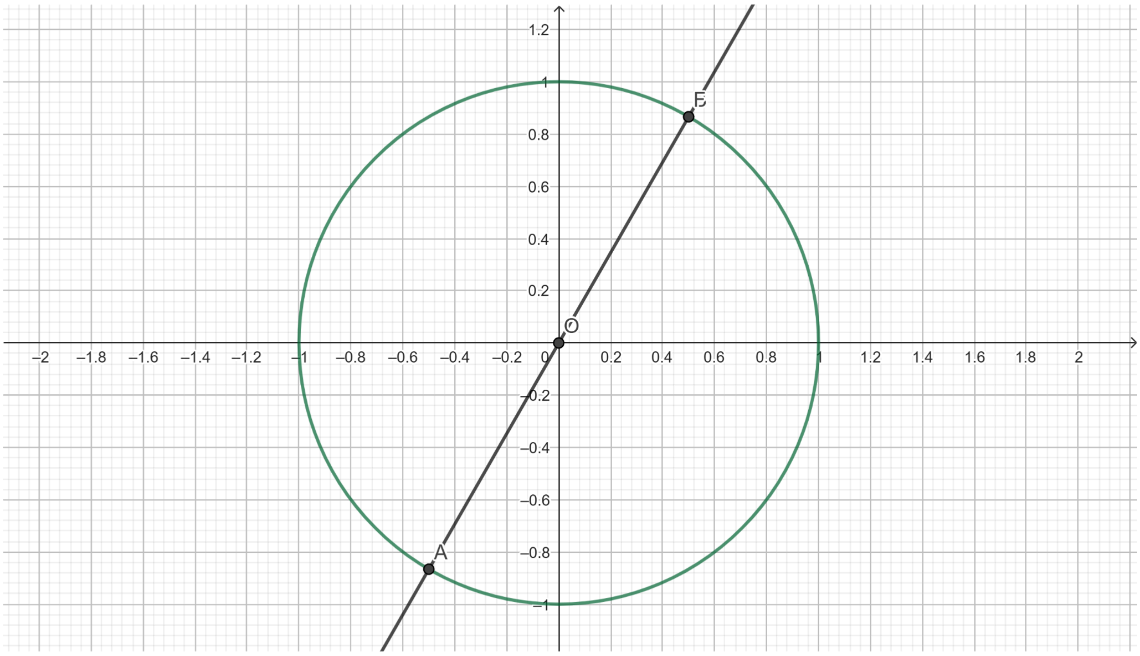
"Um relógio analógico marca 5 horas. Qual é o menor ângulo formado pelos ponteiros das horas e dos minutos?"

Resposta: 150º

Desafio 2:

Construa o ciclo trigonométrico e marque os pontos correspondentes aos ângulos $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}$. Qual a figura geométrica se formou?

Resposta:



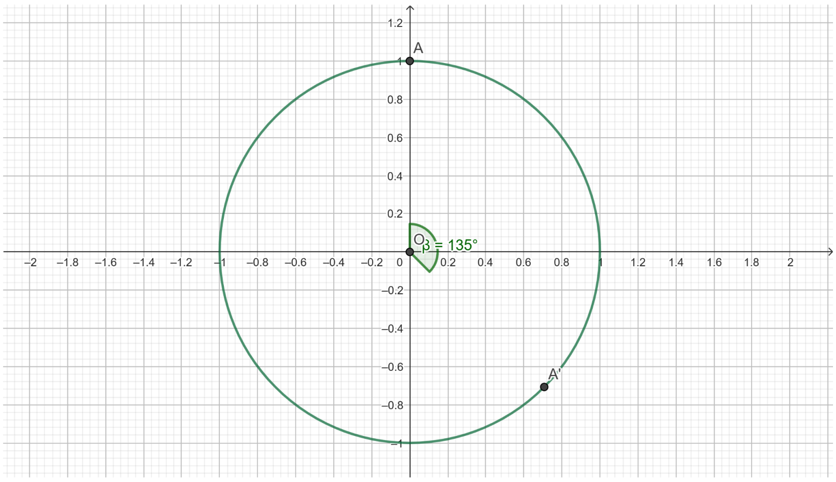
Como os 2 ângulos coincidem no ponto A e 2 ângulos coincidem no ponto B. Logo formam um segmento de reta.

Desafio 3:

Uma roda gigante possui raio de 20 metros. Se um passageiro está no ponto mais alto da roda gigante e gira um ângulo de 135º no sentido horário, qual será sua nova altura do solo?

Resposta: ao girar um ângulo de 135º, o passageiro está a 45º do eixo horizontal e vertical da roda gigante, no 4 quadrante.

Para determinar a altura, será:



$$Altura = r - rSen\,(45^{o}) = 20 - 20\frac{\sqrt{2}}{2} = 20 - 10\sqrt{2} \cong 20 - 14{,}14 \cong 5{,}86\ metros$$

Pista 1: Sempre podemos encontrar conhecimento, mas existe um lugar que é especial, que você encontra conhecimento em páginas. O próximo desafio está em frente deste lugar, nas flores que perfumam o lugar.

A pista leva em frente a Biblioteca.

Pista 2: Homenagem ao governador Mario Pereira, existe um monumento na Unioeste. O Próximo desafio está aos arredores do monumento.

A pista leva ao Monumento Mario Pereira.

Pista 3: Para subir ou descer, é necessário girar como se fosse um ciclo trigonométrico. O próximo desafio encontra-se na base deste ciclo.

A pista leva para o R.U.

Marca o máximo de pontos o grupo que resolver o último desafio em até 20 minutos.

Fabrício e Milleni: Adivinhando Volume, Peso e Comprimento (20 min)

Materiais necessários: Recipientes de diferentes formatos e tamanhos (como copos, garrafas, jarros); líquidos para encher os recipientes; objetos de diferentes pesos (livros, bolas, brinquedos etc.); objetos de diferentes comprimentos (lápis, cordas, cabos etc.), instrumentos de medida como balança e régua.

Descrição:

Inicialmente vamos encher os recipientes com quantidades variadas de líquido, e realizar a medição do peso e comprimento dos objetos selecionados.

Cada grupo deverá estimar o volume, peso e comprimento dos objetos indicados. Serão 4 objetos para estimar o volume, 3 objetos para estimar o peso e 3 objetos para estimar o comprimento.

Os objetos escolhidos para a unidade de medida peso foram uma caixa com bolinhas de gude (1,100 kg), um notebook (1,730 kg), um kindle (255g) e uma garrafa com um pouco de água (75g). Para a unidade de medida comprimento, foram escolhidos uma caixa (20,5cm), um canudo de formatura (31cm) e um pedaço de barbante (1,65m). Por fim, para o volume, foram escolhidos uma tampinha (10ml), um cilindro obliquo (1400ml) e um poliedro (750ml).

A pontuação de cada grupo será atribuída de acordo com as medidas informadas mais próximas das corretas.

Felipe K. e Felipe S.: Jogo de raciocínio lógico envolvendo feijões

Será trabalhado um jogo de raciocínio lógico com os estudantes, o qual tem as seguintes regras:

1. Jogam dois jogadores, um contra o outro. Há 8 feijões em uma mesa e cada jogador possui 5 feijões em sua mão.
2. O jogo é jogado em turnos. Na sua vez, o jogador é obrigado a fazer uma única ação. As ações são:

- Pegar 1, 3 ou 4 feijões da mesa e colocá-los em sua mão;
- Colocar 1, 3 ou 4 feijões da sua mão na mesa.

3. Ganha o jogador que coletar o último feijão da mesa.

Todos os alunos jogarão em conjunto contra os professores. Este jogo é planejado de tal modo que o primeiro jogador a jogar, se jogar corretamente, sempre ganhará. Não daremos essa informação de início aos alunos, mas deixaremos com que o primeiro turno seja sempre deles.

A fim de vencer o desafio, a estratégia a ser adotada pelos estudantes deve ser a de pegar ou depositar feijões na mesa de modo que, ao fim do seu turno, haja 2, 7, 9, 14 ou 16 feijões sobre a mesa.

Serão jogadas cinco partidas com os estudantes. A primeira valerá 5 pontos. A segunda 10, a terceira 10, a quarta 25 e a quinta 30 pontos. O intuito do valor baixo nas primeiras tentativas é o de fazer com que os estudantes as utilizem para testar o jogo e criar uma estratégia.

Ao final das 5 partidas, falaremos que o primeiro a jogar sempre irá ganhar e será solicitado aos estudantes que expliquem a estratégia necessária para vencer o jogo e os professores irão avaliar a explicação, recompensando-a com pontos.

Se os estudantes elaborarem uma resposta que atinja o nível “precisamos deixar 2 feijões na mesa”, serão dados 15 pontos a eles. Se o nível da explicação atingir “precisamos sempre deixar 2, 7, 9, 14 ou 16 feijões na mesa ao fim do nosso turno”, então os estudantes ganharão mais 10 pontos (totalizando 25). Por fim, se a explicação ficar bem elaborada a nível de “ao fim do nosso turno, precisamos sempre fazer com que o número de feijões sobre a mesa seja um múltiplo de 7 ou um múltiplo de 7 mais duas unidades”, eles ganharão mais 5 pontos (totalizando 30) nessa atividade final.

Somando a quantidade máxima de pontos a serem feitos pelos estudantes, obtemos 110 pontos. Entretanto, caso a pontuação exceda 100 pontos, esses pontos extras serão desconsiderados e os alunos receberão a nota máxima de 100 pontos na gincana.

Eduardo e Milena:Atividade Pega-Varetas

Vamos pedir para que os alunos se dividam em dois grupos A e B.

Para este jogo de pega-varetas, vamos reduzir as varetas apenas às cores azul (3 pontos) e amarela (5 pontos).

Cada grupo se dividirá novamente em dois grupos menores (A_1, A_2,B_1 e B_2) para jogar uma partida de pega varetas (A_1 contra A_2 e B_1 contra B_2). De acordo com o número de varetas pegas por cada grupo (A e B), formarão um sistema linear de duas incógnitas para que o outro grupo resolva (A ou B). Para cada sistema linear elaborado e resolvido corretamente, os alunos somarão 10 pontos.

Os alunos poderão jogar, elaborar e resolver tantos sistemas quanto possíveis no tempo de 25 minutos, para somar a maior quantidade de pontos possível.

Os professores estarão responsáveis por acompanhar a execução e verificar se os sistemas foram elaborados e resolvidos corretamente.

Luiza: Jogo das borboletas

Assim que os alunos chegarem, será entregue 3 cartas ao grupo e 3 para o professor e as regras serão explicadas:

Os jogadores poderão colocar uma carta em uma linha conectando uma das borboletas centrais com outra borboleta, após colocar a carta, se ela tiver uma seta vermelha será realizada a subtração e se a seta for azul, será realizada a soma do valor da carta nos botões das borboletas ligadas pela linha. Na primeira carta, os alunos podem determinar a quantia de botões em cada borboleta, respeitando o valor e a operação da carta colocada. Em seguida, será a vez do professor, que colocara uma carta e botões correspondentes a operação e valor da carta. E assim sucessivamente, a cada triângulo formado com as cartas, o jogador responsável pela carta que fechou o triângulo ganha 1 ponto, se formarem um losango, ganha 2 pontos. Totalizando no máximo 10 pontos.

Referências

ASTH, Rafael C.. **Desafios matemáticos para estimular seu raciocínio**. Publicado em Toda matéria. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/desafios-matematicos/#:~:text=A%20escada%20de%20um%20pr%C3%A9dio,estava%20quando%20come%C3%A7ou%20a%20contar%3F&text=Resposta%20correta%3A%20Maria%20estava%20no%20vig%C3%A9simo%20degrau.. Acesso em: 18 out. 2024.

Calcule mais. 2004. Disponível em: https://calculemais.com.br/exercicios-de-matematica/835/raciocinio_logico-exercicio-exercicio_19. Acesso em: 16 nov. 2024.

CLUBES de Matemática da OBMEP: **Probleminha corte a pizza**. Probleminha corte a pizza. Disponível em: https://clubes.obmep.org.br/blog/probleminha-corte-a-pizza/#:~:text=Como%20dividir%20uma%20pizza%20em%208%20peda%C3%A7os%20realizando%20apenas%20tr%C3%AAs%20cortes%3F&text=Basta%20cortar%20a%20pizza%20em,tem%2Dse%20assim%208%20peda%C3%A7os.. Acesso em: 18 out. 2024.

DESAFIO de lógica 215. Disponível em: https://www.concursos.com.br/desafios/desafio-logica-215.htm#:~:text=O%20pai%20do%20padre%20%C3%A9,que%20eu%20sou%20do%20padre%3F&text=Resolu%C3%A7%C3%A3o%3A%20A%20resposta%20correta%20%C3%A9,eu%20o%20pai%20do%20padre.. Acesso em: 18 out. 2024.

FUVEST. Publicado em: **Passei direto**. Disponível em: https://www.passeidireto.com/pergunta/146532468/14-fuvest-um-estudante-terminou-um-trabalho-que-tinha-n-paginas-para-numerar-tod. Acesso em: 18 out. 2024.
MATEMÁTICA. 2001. Prova objetiva PUC Rio. Disponível em: https://www.puc-rio.br/vestibular/repositorio/provas/2001-2/matoo.html. Acesso em: 18 out. 2024.

Relatório

O 10º encontro, realizado no dia 30 de novembro, foi diferente dos anteriores, pois, em vez de uma aula convencional em sala, aconteceu uma gincana organizada pelos estagiários do PROMAT. Foram planejadas 10 atividades, e cada dupla ficou responsável por escolher e conduzir uma delas. Os estagiários chegaram entre 07:00 e 07:40 e se dirigiram ao espaço da cantina da Universidade, onde ocorreriam as atividades, para organizar as mesas e os jogos. Como Luiza não chegou a tempo, sua atividade foi retirada do cronograma e ela se juntou ao Ruan e Leonardo, aplicando o SET!.

À medida que os alunos chegavam, eram direcionados ao ponto de encontro. Às 08:00, foram divididos em grupos e cada grupo começou em uma atividade diferente, com um tempo máximo estipulado para cada uma.

A atividade conduzida por Leonardo e Ruan foi o jogo Set!. Antes do início, eles explicaram as regras a cada grupo: os alunos deveriam formar trios de cartas seguindo um padrão – todas as características deveriam ser diferentes ou todas iguais. Até encontrarem o primeiro trio correto, o jogo não valia pontos. A partir desse momento, cada trio formado corretamente contava meio ponto para a pontuação, e, caso algum grupo declarasse "Set!" incorretamente, perderia meio ponto. Os alunos jogavam contra os estagiários, e o objetivo era identificar os trios antes deles.

O primeiro grupo a participar foi o grupo rosa, que rapidamente compreendeu as regras e começou a pontuar. Com um bom desempenho, conseguiram atingir a pontuação máxima de 10 pontos dentro do tempo estipulado. Esse resultado fez com que pensássemos que os alunos seriam no geral rápidos e que nossa maneira de pontuação iria enviesar os resultados de maneira drástica, entretanto, estávamos incorretos, visto que quase todos os grupos que passaram depois do rosa não fizeram mais do que 5 pontos, exceto um, o grupo roxo, que era composto pelos alunos que fizeram o Promat conosco, fizeram 8 pontos. Depois dessa experiência nos juntamos com os outros grupos para fazer a contagem de todos os pontos, e nos dirigimos até o LEM, onde os resultados foram declarados, e os alunos todos ganharam uma bolsa de comida.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O PROMAT representou uma experiência enriquecedora e essencial para nossa formação, permitindo a aplicação prática dos conhecimentos teóricos adquiridos ao longo do curso, bem como o estudo de novas teorias. Ao longo dos 10 encontros e dos meses de preparação para eles, pudemos vivenciar de perto os desafios e as responsabilidades do trabalho docente, compreendendo a complexidade do processo de ensino-aprendizagem e a importância de estratégias pedagógicas bem planejadas.

A interação com os alunos, a necessidade de adaptação às suas diferentes realidades e ritmos de aprendizado, bem como o desenvolvimento de metodologias que tornassem as aulas mais dinâmicas e envolventes, foram aspectos que ampliaram nossa visão sobre o papel do professor. Além disso, pudemos perceber como a didática e a comunicação eficiente são fundamentais para garantir a compreensão dos conteúdos.

Apesar dos desafios enfrentados, como a necessidade de reformulação de estratégias para atender às necessidades da turma e de adaptar-se a outras metodologias fora da nossa zona de conforto, consideramos que cada obstáculo contribuiu para meu amadurecimento profissional. Cada encontro nos permitiu desenvolver habilidades essenciais, como planejamento, flexibilidade e capacidade de mediação do conhecimento.

Dessa forma, essa experiência não apenas reforçou nossa vontade para a docência, mas também nos motivou a continuar estudando e aprimorando nossas práticas pedagógicas. Hoje temos ainda mais certeza de que a educação é um campo dinâmico e transformador, e que o aprendizado contínuo é essencial para o desenvolvimento de um ensino de qualidade.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. ATIVIDADES PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA NA PERSPECTIVA DA DIDÁTICA DA MATEMÁTICA. In: EPREM - ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO DE MATEMÁTICA, 10., 2009, Guarapuava. **Anais [...] .** Curitiba: SBEM, 2009. p. 992-1002.

ALMOULOUD, Saddo Ag; SILVA, Maria José Ferreira da; MIGUEL, Maria Inez Rodrigues; FUSCO, Cristiana Abud da Silva. Formação de professores de Matemática e apreensão significativa de problemas envolvendo provas e demonstrações. **Educ. Mat. Pesqui.**, São Paulo, v. 10, n. 2, p. 217-246, maio 2008. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/1744/1135/3561. Acesso em: 06 out. 2024.

ANDRADE, M; ARANTE, M. **Saiba em quanto Rebeca Andrade será taxada por premiação olímpica**. Metrópoles. Disponível em: https://www.metropoles.com/esportes/olimpiadas-2024/saiba-em-quanto-rebeca-andrade-sera-taxada-por-premiacao-olimpica. Acesso em 08 de agosto de 2024.

ASTH, Rafael C.. Desafios matemáticos para estimular seu raciocínio. Publicado em **Toda matéria**. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/desafios-matematicos/#:~:text=A%20escada%20de%20um%20pr%C3%A9dio,estava%20quando%20come%C3%A7ou%20a%20contar%3F&text=Resposta%20correta%3A%20Maria%20estava%20no%20vig%C3%A9simo%20degrau.. Acesso em: 18 out. 2024.

ASTH, Rafael. Exercícios sobre princípio fundamental da contagem. **Toda Matéria**, *[s.d.]* Disponível em: https://www.todamateria.com.br/exercicios-sobre-principio-fundamental-da-contagem/. Acesso em: 6 ago. 2024

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática e a Perspectiva Sócio-crítica. In: II SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, II, 2003, Santos. **Livro de Resumos.** Santos: SBEM, 2003. p. 135-144.

BUTTS, Thomas. Formulando Problemas Adequadamente. In: KRULIK, S.; REYS, R.E. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. São Paulo: Atual, 1997, p.32-48.
Calcule mais. 2004. Disponível em: https://calculemais.com.br/exercicios-de-matematica/835/raciocinio_logico-exercicio-exercicio_19. Acesso em: 16 nov. 2024.

CARNEIRO, M. **Mapas Mentais: Matriz**. Projeto Agatha. Disponível em https://projetoelisa.com.br/app/mapas-mentais-de-matematica/matrizes.php. Acesso em 08 de agosto de 2024.

CLUBES de Matemática da OBMEP: **Probleminha corte a pizza**. Probleminha corte a pizza. Disponível em: https://clubes.obmep.org.br/blog/probleminha-corte-a-pizza/#:~:text=Como%20dividir%20uma%20pizza%20em%208%20peda%C3%A7os%20realizando%20apenas%20tr%C3%AAs%20cortes%3F&text=Basta%20cortar%20a%20pizza%20em,tem%2Dse%20assim%208%20peda%C3%A7os.. Acesso em: 18 out. 2024.

DANTE, L. R. **Matemática - contexto e aplicações**. São Paulo: Editora Ática, 2021. v. 2.

DESAFIO de lógica 215. Disponível em: https://www.concursos.com.br/desafios/desafio-logica-215.htm#:~:text=O%20pai%20 do%20padre%20%C3%A9,que%20eu%20sou%20do%20padre%3F&text=Resolu%C3%A7%C3%A3o%3A%20A%20resposta%20correta%20%C3%A9,eu%20o%20pai%20do%20padre.. Acesso em: 18 out. 2024.

DOS SANTOS, M. G. M.; SOUSA, R. T. DE; ALVES, F. R. V. Situações Didáticas Profissionais: concepções e obstáculos no ensino de sistemas lineares e o uso do GeoGebra. **Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, v. 14, n. 1, p. 1–22, 15 abr. 2024.

FUVEST. Publicado em: **Passei direto**. Disponível em: https://www.passeidireto.com/pergunta/146532468/14-fuvest-um-estudante-terminou-um-trabalho-que-tinha-n-paginas-para-numerar-tod. Acesso em: 18 out. 2024.
MATEMÁTICA. 2001. Prova objetiva PUC Rio. Disponível em: https://www.puc-rio.br/vestibular/repositorio/provas/2001-2/matoo.html. Acesso em: 18 out. 2024.

HENRIQUES, A.; ALMOULOUD, S. A. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência & Educação (Bauru)**, v. 22, n. 2, p. 465–487, jun. 2016.

HOLANDA, B. **Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra**. Rio de Janeiro, RJ: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2021.

IEZZI, G. **Fundamentos de matemática elementar volume 4 :** sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 8. ed. São Paulo: Editora Atual, 2022. v. 4

JESUS, Danilo do Nascimento de; DULLIUS, Maria Madalena. **O USO DO SOFTWARE GEOGEBRA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO DO 2º GRAU**: o caso da 1ª série do ensino médio de uma escola federal. Vale do Taquiri, 2018. Disponível em: https://www.univates.br/ppgece/media/pdf/2018/o_uso_do_software_geogebra_para_o_ensino_de_funcao_do_2_grau_o_caso_da_1_serie_do_ensino_medio_de_uma_escola_federal.pdf. Acesso em: 06 out. 2024

MALAGUTTI, Pedro Luiza. **Atividades de Contagem a partir da Criptografia**. 11. ed. Rio de Janeiro: Impa, 2015. 77 p. (Programa de Iniciação Científica da OBMEP).

Northrop B-2 Spirit. In: **WIKIPÉDIA: a enciclopédia livre.** Wikimedia, 2024. Disponível em: <https://en.wikipedia.org/wiki/Northrop_B-2_Spirit>. Acesso em: 10 de setembro de 2024.

PANTOJA, L. F. L.; CAMPOS, N. F. DA S. C.; SALCEDOS, R. R. C. A Teoria dos registros de representação semióticas e o estudo de sistemas de equações algébricas lineares. **VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática**. 2013.

PONTE, J. P. DA. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 4. ed. Belo Horizonte, MG: Autêntica Editora, 2021.

PONTES, E. A. S. Noção intuitiva no ato de ensinar e aprender matemática por meio de uma atividade de ensino de sistemas lineares com coeficientes positivos. **Revista Baiana de Educação Matemática**, v. 2, n. 01, p. e202106, 26 maio de 2021.

Quadro de medalhas. International Olympics Committee. Disponível em https://olympics.com/pt/paris-2024/medalhas. Acesso em 08 de agosto de 2024.

RIGONATTO, M**. "Propriedades dos Determinantes";** Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/matematica/propriedades-dos-determinantes.htm. Acesso em 09 de agosto de 2024.

SCHOENFELD, A. **Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas?**. In P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), Investigar para aprender matemática (pp. 61-72). Lisboa: APM e Projecto MPT. 1996.

SOARES, Vanessa Ribeira. **Batalha naval e suas aplicações**. 2016. 83 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Fedaral de Goiás, Goiânia, 2016.

VIDAL, S. C.; CAPRI, M. D. R.; ROMÃO, E. C. **Cryptography as an educational tool in counting techniques for high school**. International Journal for Innovation Education and Research, v. 10, n. 5, p. 76–88, 23 abr. 2022.

ANEXOS:

Anexo 1: Apostila aula 1

Princípio Multiplicativo ou Princípio Fundamental da Contagem

Se uma decisão D_1 pode ser tomada de p maneiras e, qualquer que seja essa escolha, uma decisão D_2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D_1 e D_2 é igual a pq.

Princípio Aditivo

Ao dividir um problema de contagem em dois casos, sendo que, em cada caso, contamos o número de soluções que nele se enquadram e todas as soluções se enquadram em exatamente um dos casos, então o número total de soluções é igual à soma dos números de soluções de cada caso.

Permutações e Combinações

Seja $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ um conjunto de n elementos.

Uma lista ordenada formada por todos os elementos de A é dita uma *permutação (simples)* de a_1, a_2,..., a_n. Denotamos por P_n o número de permutações de a_1, a_2,..., a_n. Tem-se

$$P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

De fato, para formar uma permutação de a_1, a_2,..., a_n, inicialmente, há n maneiras de escolher o primeiro elemento da permutação. Uma vez escolhido o primeiro elemento da permutação, há $n-1$ maneiras de escolher o segundo elemento da permutação (não pode ser igual ao primeiro elemento). Uma vez escolhidos o primeiro e segundo elementos da permutação, há $n-2$ maneiras de escolher o terceiro elemento da permutação (não pode ser igual ao primeiro elemento e nem igual ao segundo), e assim por diante. Pelo Princípio Multiplicativo, o número de permutações de a_1, a_2,..., a_n é $P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

Seja k um número inteiro, com $0 \leq k \leq n$. Uma *combinação (simples)* de a_1, a_2,..., a_n tomados k a k é um subconjunto de A com k elementos. Denotamos por C_n^k o número de combinações de a_1, a_2,..., a_n tomados k a k. Tem-se

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

De fato, vamos contar, de duas maneiras diferentes, o número de listas ordenadas formadas por k elementos de A.

- Primeira maneira:
  Há n maneiras de escolher o primeiro elemento da lista. Uma vez escolhido o primeiro elemento da lista, há $n-1$ maneiras de escolher o segundo elemento da lista (não pode ser igual ao primeiro elemento). Uma vez escolhidos o primeiro e segundo elementos da lista, há $n-2$ maneiras de escolher o terceiro elemento da

lista (não pode ser igual ao primeiro elemento e nem igual ao segundo), e assim por diante. Pelo Princípio Multiplicativo, o número de listas ordenadas formadas por k elementos de A é igual a $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+2) \cdot (n-k+1)$.

- Segunda maneira:

Há C_n^k maneiras de escolher os k elementos que comporão a lista. Uma vez escolhidos os elementos da lista, há $P_k = k!$ de ordená-los, formando assim uma lista (ordenada). Pelo Princípio Multiplicativo, o número de listas ordenadas formadas por k elementos de A é igual a $C_n^k \cdot k!$.

Como as duas maneiras acima descritas contam o mesmo conjunto, então $C_n^k \cdot k! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)$, ou seja, $C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}{k!}$. Além disso, multiplicando o numerador e o denominador da fração precedente por $(n-k)!$, e considerando que $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) \cdot (n-k)! = n!$, tem-se $C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$.

Permutações de Elementos nem Todos Distintos

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementos nem todos distintos, de modo que um deles aparece k_1 vezes, outro aparece k_2 vezes, e assim por diante, de forma que $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$, sendo m o número de elementos distintos. Uma permutação desses elementos é uma lista ordenada formada por todos esses elementos. Denotamos por $P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m}$ o número de tais permutações. Tem-se

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_m} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \cdots \cdot k_m!}.$$

De fato, para simplificar a notação, vamos contar o número de permutações dos elementos a, a, a, b, b, c, ou seja, vamos calcular $P_6^{3,2,1}$ (o caso geral é análogo). Inicialmente, há C_6^3 maneiras de escolher 3 posições na permutação para nelas colocar os 3 elementos iguais a a. Uma vez colocados os 3 elementos iguais a a nas 3 posições escolhidas da permutação, há C_3^2 maneiras de escolher 2 posições na permutação para nelas colocar os 2 elementos iguais a b. Depois disso, há apenas $C_1^1 = 1$ maneira de escolher uma posição na permutação para nela colocar o único elemento igual a c. Pelo Princípio Multiplicativo, o número de permutações de a, a, a, b, b, c é $P_6^{3,2,1} = C_6^3 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} \cdot \frac{1}{1} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (2 \cdot 1) \cdot 1} = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!}$.

Fonte: HOLANDA, B. Primeiros passos em Combinatória, Aritmética e Álgebra. Rio de Janeiro, RJ: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2021.

Anexo 2: Apostila aula 2 probabilidade

Experimento aleatório

Chamamos de experimentos aleatórios aqueles que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados diferentes. Embora não saibamos qual o resultado que irá ocorrer num experimento, em geral, conseguimos descrever o conjunto de todos os resultados possíveis que podem ocorrer.

Espaço amostral

Chamamos de espaço amostral o conjunto form ado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Tipos de eventos

- **Eventos mutuamente exclusivos:** Dois eventos são mutuamente exclusivos se não podem ocorrer ao mesmo tempo.
- **Eventos dependentes:** Dois eventos são dependentes se a ocorrência de um deles afeta a chance de ocorrência do outro.
- **Eventos independentes:** Dois eventos são independentes se a ocorrência de um deles não afeta a chance de ocorrência do outro.

Probabilidade

Probabilidade é o número que resulta da divisão do número de casos favoráveis a um evento pelo número total de casos possíveis. Denotamos a probabilidade de um evento A por

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favoráveis a A}}{\text{número total de casos possíveis}}.$$

.

Exemplo 1. Um dado é lançado. Qual é a probabilidade de o resultado ser maior que 4?

Solução. O espaço amostral é $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. O evento é o conjunto $\{5, 6\}$. Portanto, a probabilidade é

$$P(\text{resultado maior que 4}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

□

Sobre a probabilidade de eventos, temos as seguintes propriedades:

Propriedade 1. *Se A e B são eventos independentes, então a probabilidade de A ou B ocorrer é a soma das probabilidades de A e B. Ou seja,*

$$P(A \text{ } ou \text{ } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ } e \text{ } B)$$

Exemplo 2. Um grupo de 100 estudantes fez exame em física e em matemática. Suponha que 60 passaram em matemática, 30 em física e 20 em ambas. Se um estudante é escolhido ao acaso deste grupo, qual é a probabilidade dele ter passado em matemática ou em física ou em ambas?

Solução. Considere os eventos

$$\begin{aligned} A &= \text{passar em matemática,} \\ B &= \text{passar em física.} \end{aligned}$$

Estamos interessados em $P(A \text{ ou } B)$. Assim,

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{60}{100} \\ P(B) &= \frac{30}{100} \\ P(A \text{ e } B) &= \frac{20}{100}. \end{aligned}$$

Com isso, usando a **Propriedade 1**, temos que

$$\begin{aligned} P(A \text{ ou } B) &= P(A) + P(B) - P(A \text{ e } B) \\ P(A \text{ ou } B) &= \frac{60}{100} + \frac{30}{100} - \frac{20}{100} \\ P(A \text{ ou } B) &= \frac{70}{100} \end{aligned}$$

□

Propriedade 2. *Se a probabilidade de um evento A ocorrer é $P(A)$, então a probabilidade de A não ocorrer é $1 - P(A)$.*

Probabilidade condicional

Sejam A e B eventos de um espaço amostral e seja $P(B) \neq 0$. Então a probabilidade condicional de A dado que B já ocorreu, denotada por $P(A/B)$, é dada por:

$$P(A/B) = \frac{P(A \text{ e } B)}{P(B)}.$$

Exemplo 3. Jogando um dado "honesto de seis faces e sabendo que ocorreu um número maior que 2, qual é a probabilidade de ser um número ímpar?

Solução. Seja os eventos

$$A = \text{número ímpar},$$
$$B = \text{número maior que 2}.$$

Estamos interessados em $P(A/B)$. Assim,

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$
$$P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3},$$
$$P(A \text{ e } B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

□

Regra do produto

Da definição de probabilidade condicional, obtemos a chamada regra do produto de probabilidades.

Proposição 3. *Sejam A e B eventos de um espaço amostral e seja $P(B) \neq 0$. Então*

$$P(A \text{ e } B) = P(A/B) \cdot P(B).$$

Exemplo 4. Em um lote de 10 peças, 4 são defeituosas, 2 peças são retiradas uma após a outra sem reposição. Qual a probabilidade de que ambas sejam boas?

Solução. Sejam os eventos

$$A = \text{primeira peça boa},$$
$$B = \text{segunda peça boa}.$$

Então

$$P(A \text{ e } B) = P(A/B) \cdot P(B) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}.$$

□

Fonte: Elaborado pelos autores

Anexo 3: Apostila aula 2, estatística

Conceitos Básicos de Estatística (Resumo)

Pretende-se abordar noções básicas de Estatística Descritiva. Essa parte da Estatística pretende responder às seguintes perguntas:

- Como organizar dados em tabelas e gráficos, escolhendo um método apropriado de coletar os dados? Que tipos de representação dos dados são mais recomendados para os diversos tipos de dados?
- Como resumir, de forma sensata, a informação contida em um conjunto de dados através de medidas (chamadas de medidas estatísticas) adequadas?
- O que se pode concluir a respeito de um ou mais conjuntos de dados a partir de gráficos e medidas estatísticas a estes dados?

Existem variadas formas de organizar os dados, tais como por tabelas, gráficos de setores (ou de pizza), histogramas (gráfico de barras) (ver Material Teórico do Portal da OBMEP, "Estatística Básica: O Início", F. B. Holanda, A. C. M. Neto (revisor), em https://cdnportaldaobmep.impa.br/portaldaobmep/uploads/material_teorico/cfcdxhltnhsso.pdf).

Há dois tipos de medidas estatísticas: as *medidas de posição* (ou de *tendência central*) e as *medidas de dispersão*. As medidas de posição fornecem uma ideia dos valores mais típicos assumidos pelas observações. As medidas de dispersão têm por objetivo avaliar quão espalhadas estão as observações em torno de seus valores centrais.
Vamos considerar as seguintes medidas de posição: *média (aritmética)*, *mediana* e *moda*, e as seguintes medidas de dispersão: *desvio padrão* e *variância*.

Sejam as observações numéricas x_1, x_2,..., x_n.

- A *média (aritmética)* de x_1, x_2,..., x_n é dada por $\mu = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.
- A *mediana* de x_1, x_2,..., x_n é um número que tem a seguinte propriedade: metade das observações são maiores do que ou iguais e a outra metade menores do que ou iguais a este número. Em termos intuitivos, a mediana é o valor central entre os observados. Mais precisamente, para se obter a mediana de x_1, x_2,..., x_n, reordena-se esses números em uma nova lista de números $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(n)}$. Quando n é ímpar, a mediana é definida como $x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ e, quando n é par, a mediana é definida como $\frac{x_{\left(\frac{n}{2}\right)}+x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}}{2}$. A mediana pode ser uma medida mais confiável do que a média aritmética, uma vez que é menos afetada por valores extremos não típicos das observações.
- A *moda* de x_1, x_2,..., x_n é um elemento de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ mais frequentemente observado. Pode ocorrer de haver mais de uma moda, ou seja, existir mais de um elemento de $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ com a mesma maior frequência. Assim, a moda não é

necessariamente única, ao contrário da média e da mediana. É uma medida menos interessante do que a média e a mediana, especialmente quando o número de observações é pequeno.

- O *desvio padrão* de x_1, x_2,..., x_n é dado por $\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-\mu)^2+(x_2-\mu)^2+\cdots+(x_n-\mu)^2}{n}}$, sendo μ a média aritmética de x_1, x_2,..., x_n. A *variância* de x_1, x_2,..., x_n é o quadrado do seu desvio padrão, ou seja, é igual a σ^2.

Médias Aritmética, Geométrica e Harmônica

Uma *média* de um conjunto de uma lista de números é um número que pode substituir todos os números da lista sem alterar uma certa característica desses números.
Quando essa característica é a soma dos números da lista, obtém-se a *média aritmética (simples)*. Assim, a média aritmética da lista de n números x_1, x_2,..., x_n é um número μ_a tal que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \underbrace{\mu_a + \mu_a + \cdots + \mu_a}_{n \text{ parcelas}} = n\mu_a$ e, logo, $\mu_a = \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.
Quando a característica a ser preservada é o produto dos números da lista, obtém-se a *média geométrica (simples)*. Assim, a média geométrica da lista de n números positivos x_1, x_2,..., x_n é um número μ_g tal que $x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n = \underbrace{\mu_g \cdot \mu_g \cdot \ldots \cdot \mu_g}_{n \text{ fatores}} = \mu_g^n$ e, logo, $\mu_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$.
Quando a característica a ser preservada é a soma dos inversos dos números da lista, obtém-se a *média harmônica*. Assim, a média harmônica da lista de n números positivos x_1, x_2,..., x_n é um número μ_h tal que $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \underbrace{\frac{1}{\mu_h} + \frac{1}{\mu_h} + \cdots + \frac{1}{\mu_h}}_{n\, parcelas} = n\frac{1}{\mu_h}$ e, logo, $\mu_h = \frac{1}{\frac{\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)}{n}} = \frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$.
Dependendo da situação, pode variar o tipo de média que surge. Vejamos os exemplos que seguem.

Exemplo 1: Uma empresa produziu, durante o primeiro trimestre do ano passado, 500, 200 e 200 unidades, em janeiro, fevereiro e março, respectivamente. Qual foi a produção média nesse trimestre?

Solução: Queremos uma média μ tal que, se a produção mensal fosse sempre igual a μ, a produção trimestral seria a mesma. A produção trimestral foi $500 + 200 + 200$. Se em todos os meses a produção fosse igual a μ, a produção trimestral seria igual a 3μ. Logo, $3\mu = 500 + 200 + 200$ e $\mu = \frac{500+200+200}{3} = 300$. Assim, nesse caso, a média desejada é a média aritmética.

Exemplo 2: Uma empresa aumentou sua produção durante o bimestre do ano passado. Em janeiro e em fevereiro, as taxas de aumento forem de 21% e 8%, respectivamente. Qual foi a taxa média de aumento mensal nesse bimestre?

Solução: Queremos uma taxa média μ tal que, se em todos os meses a taxa de aumento fosse igual a μ, o aumento bimestral seria o mesmo. Seja x a produção antes do início janeiro. Então, a produção ao final de fevereiro foi igual a $x(1+21\%)(1+8\%) = 1{,}21 \cdot 1{,}08 \cdot x$. Se, em todos os meses, tivéssemos a mesma taxa de aumento μ, então a produção ao final de fevereiro seria igual a $x(1+\mu)(1+\mu) = (1+\mu)^2 \cdot x$. Logo, $(1+\mu)^2 \cdot x = 1{,}21 \cdot 1{,}08 \cdot x$ e, portanto, $1+\mu = \sqrt{1{,}21 \cdot 1{,}08} \approx 1{,}1432$ e $\mu = 0{,}1432 = 14{,}32\%$. Assim, nesse caso, a taxa média desejada aumentada de uma unidade é a média geométrica das taxas aumentadas de uma unidade.

Exemplo 3: Um concurso anual distribui igualmente entre os vencedores um prêmio total de R\$ $1800{,}00$. Nos últimos três anos houve 2, 1 e 3 premiados, respectivamente. Qual foi o prêmio médio desses ganhadores? Qual foi o rateio médio nos três anos?

Solução: Queremos um prêmio médio μ tal que, se todos os prêmios fossem iguais a μ, o total distribuído seria o mesmo. Ora, μ é a média aritmética dos prêmios anuais. Os prêmios no primeiro, segundo e terceiro anos foram, respectivamente, iguais a $\frac{1800}{2}$, $\frac{1800}{1}$ e $\frac{1800}{3}$. Assim, $\mu = \frac{\frac{1800}{2}+\frac{1800}{1}+\frac{1800}{3}}{3} = 1800 \cdot \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}}{3} = \frac{1800}{\frac{3}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)}} = 1100$ reais. Como $\frac{3}{\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}} = \frac{18}{11}$ é a média harmônica de 2, 1 e 3, conclui-se que o rateio médio é o rateio que corresponde a uma quantidade de ganhadores igual à média harmônica dos números de ganhadores.

Desigualdades das Médias Aritmética, Geométrica e Harmônica

Sejam x_1 e x_2 números positivos. Sejam μ_a, μ_g e μ_h as médias aritmética, geométrica e harmônica de x_1 e x_2. Como $\mu_a - \mu_g = \frac{x_1+x_2}{2} - \sqrt{x_1x_2} = \left(\sqrt{\frac{x_1}{2}} - \sqrt{\frac{x_2}{2}}\right)^2 \geq 0$, então $\mu_g \leq \mu_a$, valendo a igualdade $\mu_g = \mu_a$ se, e somente se, $x_1 = x_2$. Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica para os números $\frac{1}{x_1}$ e $\frac{1}{x_2}$, tem-se $\sqrt{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2}} \leq \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2}$, valendo a igualdade se ,e somente se, $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2}$, ou seja, $x_1 = x_2$. Mas, $\sqrt{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2}} \leq \frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}}{2} \Leftrightarrow \mu_h = \frac{2}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}} \leq \sqrt{x_1x_2} = \mu_g$. Assim, $\mu_h \leq \mu_g$, valendo $\mu_h = \mu_g$ se, e somente se, $x_1 = x_2$. Assim, $\mu_h \leq \mu_g \leq \mu_a$, valendo as igualdades $\mu_h = \mu_g = \mu_a$ se, e somente se, $x_1 = x_2$. Essas desigualdades das médias aritmética, geométrica e harmônica também é válida para uma lista de $n > 2$ números.

Seguem aplicações da desigualdade das médias aritmética e geométrica.

Exemplo 4: Dados n números positivos x_1, x_2, ..., x_n, mostre que

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geq n,$$

Valendo a igualdade se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Solução: Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica à lista de n números $\frac{x_1}{x_2}$, $\frac{x_2}{x_3}$, ..., $\frac{x_n}{x_1}$, tem-se $\frac{\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_n}{x_1}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_1}} = \sqrt[n]{\frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{x_1 x_2 \cdots x_n}} = \sqrt[n]{1} = 1$, ou seja, $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_n}{x_1} \geq n$, valendo a igualdade se, e somente se, $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \cdots = \frac{x_n}{x_1}$. Vamos mostrar que $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \cdots = \frac{x_n}{x_1}$ se, e somente se, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$. De fato, se $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$, então $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \cdots = \frac{x_n}{x_1} = 1$. Por outro lado, se $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \cdots = \frac{x_n}{x_1} = r$, então, como $\frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{x_1} = 1$, tem-se $r^n = 1$ e, logo, $r = 1$ (já que $r > 0$). Como $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = \cdots = \frac{x_n}{x_1} = r = 1$, então $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Exemplo 5: Mostre que $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$, quaisquer que sejam os números positivos x e y, valendo a igualdade se, e somente se, $x = y = \sqrt[4]{4}$.

Solução: Aplicando a desigualdade das médias aritmética e geométrica à lista de 4 números x^4, y^4, 4 e 4, tem-se $\frac{x^4+y^4+4+4}{4} \geq \sqrt[4]{x^4 \cdot y^4 \cdot 4 \cdot 4}$, ou seja, $\frac{x^4+y^4+4+4}{4} \geq 2xy$, isto é, $x^4 + y^4 + 8 \geq 8xy$, valendo a igualdade se, e somente se, $x^4 = y^4 = 4 = 4$, que é equivalente a $x = y = \sqrt[4]{4}$.

Fonte: IMPA, instituto de matemática pura e aplicada. Material de apoio ao docente PIC-OBMEP. Rio de Janeiro, 2024.

Anexo 4: Aula 4, sistemas lineares

Definição 1 (Equação linear)**.** Definimos como uma equação linear toda equação do tipo

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b.$$

Nela, os coeficientes $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}$, são constantes reais, x_i são as incógnitas e b é o termo independente também um número real.

Definição 2 (Sistema linear)**.** Um sistema linear é um conjunto de equações lineares. Um sistema linear com m equações lineares e n incógnitas é um conjunto de equações lineares da forma

$$S := \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Definição 3 (Solução de um sistema linear)**.** Uma solução de um sistema linear é uma n-upla de números reais $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ tal que, substituindo $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$ em cada uma das equações do sistema, obtemos igualdades verdadeiras.

Em seguida, iremos apresentar exemplos puramente numéricos de sistemas lineares, com diferentes tipos de soluções.

Exemplo 1. Qual é o par ordenado (x, y) que é solução do seguinte sistema?

$$\begin{cases} x + 3y = 5, \\ -x + 2y = 10. \end{cases}$$

Solução por soma e subtração. Vamos resolver o sistema acima por soma e subtração. Note que se somarmos as duas equações, como uma possui x positivo e a outra negativo, eles se cancelam e nos sobra uma equação com apenas y. Assim,

$$\begin{array}{r} x + 3y = 5 \\ + \\ -x + 2y = 10 \\ \hline 5y = 15. \end{array}$$

Logo, resolvendo $5y = 15$ obtemos que

$$y = \frac{15}{5} = 3.$$

Com isso sabemos que $y = 3$, assim basta substituir $y = 3$ em qualquer das equações para encontrar o valor de x. Substituindo $y = 3$ na primeira equação, obtemos

$$\begin{aligned} x + 3 \cdot 3 &= 5 \\ x + 9 &= 5 \\ x &= 5 - 9 \\ x &= -4. \end{aligned}$$

Portanto, a solução do sistema é $(x, y) = (-4, 3)$. $\square$

Solução por substituição. Aqui resolveremos o sistema acima por substituição. Note que a primeira equação é $x + 3y = 5$, ou seja, $x = 5 - 3y$. Com isso, no lugar de x na segunda equação, podemos substituir por $5 - 3y$, obtendo

$$\begin{aligned} -x + 2y &= 10 \\ -(5 - 3y) + 2y &= 10 \\ -5 + 3y + 2y &= 10 \\ -5 + 5y &= 10 \\ 5y &= 15 \\ y &= 3. \end{aligned}$$

Com o valor de y conhecido, o processo é o mesmo que no caso anterior, substituir $y = 3$ na primeira equação e resolver para x. $\square$

Exemplo 2. Qual é o par ordenado (x, y) que é solução do seguinte sistema?

$$\begin{cases} 3x + 4y = 2, \\ 2x + 8y = 6. \end{cases}$$

Solução por soma e subtração. Vamos resolver o sistema acima por soma e subtração. No etanto, note que não é possível cancelar *apenas* somando uma equação com a outra, pois ambas possuem x e y com coeficientes diferentes.

Assim, vamos multiplicar *TODA* a primeira equação por -2, para que o coeficiente de y se torne -8 e, então, possamos somar. Multiplicar por um número diferente de 0 toda uma equação (ambos os lados) não altera a solução do sistema.

Assim, multiplicando a primeira equação por -2, obtemos

$$\begin{cases} -6x - 8y = -4 \\ 2x + 8y = 6. \end{cases}$$

Agora somando as duas equações, obtemos

$$\begin{array}{r} -6x - 8y = -4 \\ + \\ 2x + 8y = 6 \\ \hline -4x = 2. \end{array}$$

Assim, resolvendo $-4x = 2$, obtemos que

$$\begin{aligned} -4x &= 2 \\ x &= -\frac{2}{4} \\ x &= -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo $x = -\frac{1}{2}$ em qualquer das equações, obtemos o valor de y. Por exempo, substituindo $x = -\frac{1}{2}$ na segunda equação, obtemos

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 8y &= 6 \\ -1 + 8y &= 6 \\ 8y &= 7 \\ y &= \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

Logo, a solução do sistema é $(x, y) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{8}\right)$. □

É importante notar, também, que todo sistema pode ser escrito como uma matriz (chamado de forma matricial). Por exemplo, o sistema

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + ey = f, \end{cases}$$

pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}.$$

Nota 4. Perceba que que você realizar a multiplicação da matriz acima, obterá exatamente o sistema original – lembre-se da aula anterior.

Se escrevermos as matrizes acima como

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix},$$

, podemos reescrever o sistema acima como

$$AX = B.$$

As vezes, é vantajoso trabalhar com a forma matricial de um sistema, principalmente se ele é um sistema com muitas variáveis. Veremos em seguida uma propriedade muito importante da forma matricial e como resolver um sistema 3x3 com ela a partir do método de *escalonamento*.

Proposição 5. *Se $AX = B$ é um sistema linear, onde A é uma matriz $n \times n$ (ou seja, o sistema possui n equações) e n incógnitas. Então o sistema possui uma única solução se, e somente se,* $\det(A) \neq 0$.

Ou seja, se o determinante da matriz A for igual a 0, o sistema possui infinitas soluções ou nenhuma solução.

Exemplo 3. Vamos resolver o sistema

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1, \\ x - y + 2z = 2, \\ 3x + 2y - 3z = 3. \end{cases}$$

utilizando o método de escalonamento. Podemos reescrever o sistema acima como

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Primeiro, ao calcular o determinante da matriz acima (pode ser feito utilizando a regra de Sarrus), obtemos que $\det(A) = 20$. Como $\det(A) \neq 0$, o sistema possui uma única solução.

O método de escalonamento consiste em transformar a matriz A em uma matriz triangular superior, ou seja, uma matriz onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são 0. Para isso, vamos realizar operações elementares nas linhas da matriz A e na matriz B.

As operações elementares são:

1. Multiplicar uma linha por um número diferente de 0.
2. Trocar duas linhas de lugar.
3. Somar uma linha a outra multiplicada por um número.

Vamos realizar o procedimento da seguinte forma, primeiro escrevemos as matrizes A e B lado a lado, como

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -3 & 3 \end{array}\right].$$

Agora, vamos transformar a matriz A em uma matriz triangular superior.

Primeiro, vamos zerar o elemento a_{21}, ou seja, o elemento da segunda linha e primeira coluna. Para isso, vamos subtrair a primeira linha da segunda linha multiplicada por $-\frac{1}{2}$. Assim, a matriz A se torna

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 3 & 2 & -3 & 3 \end{array}\right].$$

Agora, vamos zerar o elemento a_{31}, ou seja, o elemento da terceira linha e primeira coluna. Para isso, vamos subtrair a primeira linha da terceira linha multiplicada por $-\frac{3}{2}$.

Assim, a matriz A se torna

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right].$$

Por fim, vamos zerar o elemento a_{32}, ou seja, o elemento da terceira linha e segunda coluna. Para isso, vamos subtrair a segunda linha da terceira linha. Assim, a matriz A se torna

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right].$$

Ou seja, retornando a forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

e, escrevendo na forma de sistema, temos

$$\begin{cases} 2x + 3y - z & = 1, \\ -\frac{5}{2}y + \frac{5}{2}z & = \frac{3}{2}, \\ -4z & = 0. \end{cases}$$

Perceba que, agora, podemos resolver o sistema facilmente. Primeiro, resolvemos a última equação, obtendo $z = 0$. Substituindo $z = 0$ na equação do meio, obtemos que

$$-\frac{5}{2}y + \frac{5}{2} \cdot 0 = \frac{3}{2} \Rightarrow y = -\frac{3}{5}.$$

Finalmente, substituindo $y = -\frac{3}{5}$ e $z = 0$ na primeira equação, obtemos que

$$2x + 3 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) - 0 = 1 \Rightarrow x = \frac{7}{5}.$$

Assim, a solução do sistema é

$$(x, y, z) = \left(\frac{7}{5}, -\frac{3}{5}, 0\right)$$

.

Fonte: Elaborado pelos autores

Anexo 5: Apostila utilizada na aula 5, sistemas lineares

Classificação de Sistemas Lineares

Definição 1 (Sistema Linear Homogêneo)**.** Um sistema linear é dito homogêneo se todos os termos independentes são nulos, ou seja, se a equação é da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Nota 2. Perceba que *uma* solução possível para todo sistema linear homogêneo é a solução nuloa, ou seja, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$.

No entanto, às vezes, existem outras soluções possíveis.

Definição 3 (Sistema Linear Possível e Impossível)**.** Um sistema linear é dito possível se admite pelo menos uma solução e é dito impossível se não admite nenhuma solução.

Exemplo 1. O sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

é impossível, pois não existe um par ordenado (x, y) que satisfaça ambas as equações.

Definição 4 (Sistema Linear Possível e Determinado)**.** Um sistema linear é dito possível e determinado se admite uma *única* solução.

Exemplo 2. O sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

é possível e determinado, pois existe um único par ordenado (x, y) que satisfaça ambas as equações.

Nota 5. Um sistema linear é possível e indeterminado se admite mais de uma solução. Nesse caso, o sistema possui infinitas soluções.

Ou seja, não existe sitema linear que possui 2 soluções. Apenas os três seguintes casos ocorrem:

- Sistema impossível (S.I) – nenhuma solução
- Sistema possível e determinado (S.P.D) – uma *única* solução
- Sistema possível e indeterminado (S.P.I) – infinitas soluções

Nota 6. Um sistema linear homogêneo é sempre possível, pois sempre possui a solução nula. No entanto, ele pode ser determinado ou indeterminado.

Se um sistema linear homogêneo possui uma solução diferente da nula, ele é dito indeterminado.

Graficamente, a classificação de sistemas lineares pode ser feita da seguinte forma:

Dado um sistema linear com duas equações e duas incógnitas, podemos representar cada equação como uma reta no plano cartesiano. A posição relativa dessas retas nos dá a classificação do sistema linear. Ou seja, dado o sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

perceba que cada equação pode ser reescrita da seguinte forma

$$\begin{cases} y = \frac{b_1 - a_{11}x}{a_{12}} \\ y = \frac{b_2 - a_{21}x}{a_{22}} \end{cases}$$

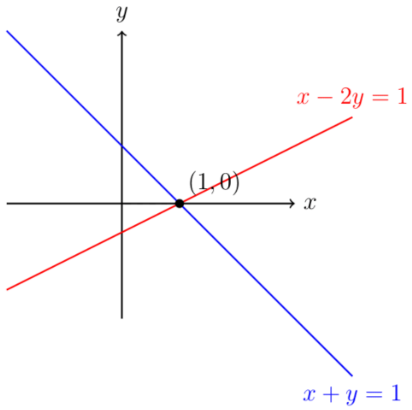
onde fica mais claro que cada equação é uma reta no plano cartesiano (dada por uma "função" $y = f(x)$). Com isso, podemos classificar o sistema linear da seguinte forma:

- S.I: Duas retas paralelas
- S.P.D: Duas retas concorrentes
- S.P.I: Duas retas coincidentes (ou seja, duas equações que representam a mesma reta)

Exemplo 3. O sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

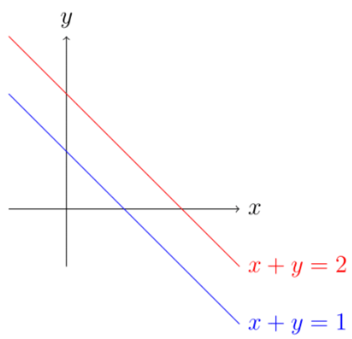
é possível e determinado, pois as duas retas se cruzam em um único ponto.



Exemplo 4. O sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

é impossível, pois as duas retas são paralelas.



Quando o sitema é 2x2, é possível determinar a posição relativa das retas no plano cartesiano facilmente. Basta escrever cada equação no formato $y = ax + b$ e observar o coeficiente angular a de cada reta: se $a_1 \neq a_2$, as retas são concorrentes; se $a_1 = a_2$, as retas são paralelas.

Fonte: Elaborado pelos autores

Anexo 6: Apostila aula 6, geometria analítica

Definição 1 (Ponto)**.** Um ponto é um par ordenado de números reais (x, y), onde x, y são números reais que representa uma posição no plano.

Definição 2 (Plano Cartesiano)**.** É um sistema de coordenadas que especifica cada ponto exclusivamente por um par de números reais chamados coordenadas, que são as distâncias assinadas até o ponto de duas linhas fixas orientadas perpendicularmente, chamadas eixos de coordenadas. O ponto onde os eixos se encontram é chamado de origem e tem $(0, 0)$ como coordenadas.

Proposição 3. *A distância entre dois pontos $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ é dada por*

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1}$$

Nota 4. Isso vem do Teorema de Pitágoras. Busque desenhar um triângulo retângulo em que a hipotenusa é o segmento que une os pontos A e B, seu comprimento (dada pelo teorema de pitágora) é a distância entre os pontos

Definição 5 (Equação Reduzida da Reta)**.** A equação reduzida da reta é dada por

$$y = mx + b \tag{2}$$

onde m é o coeficiente angular e n é o coeficiente linear.

Nota 6. Sejam $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ dois pontos. Note que m é a inclinação da reta, a qual é dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \tag{3}$$

Veja também que, caso $x = 0$, teremos que $y = m \cdot 0 + b \implies y = b$. Isso significa que b é o ponto onde a reta corta o eixo y (ou seja, quando $x = 0$).

Definição 7 (Posição Relativa entre Retas)**.** Sejam r_1 e r_2 duas retas. Para determinar a posição relativa entre elas, basta comparar seus coeficientes angulares.

- Se $m_1 = m_2$, então as retas são paralelas.
- Se $m_1 \neq m_2$, então as retas são concorrentes.

Definição 8 (Distância de um Ponto a uma Reta)**.** Seja r uma reta e $P(x_0, y_0)$ um ponto. A distância entre o ponto e a reta é dada por

$$d(P, r) = \frac{|-mx_0 + y_0 + b|}{\sqrt{m^2 + 1}} \tag{4}$$

onde $y = mx + b$ é a equação da reta.

Definição 9 (Equação da Circunferência)**.** A equação da circunferência é dada por

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \tag{5}$$

onde (a, b) é o centro da circunferência e r é o raio.

2

Fonte: Elaborado pelos autores